

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

Mémoire de Master en spécialité Mathématiques de l'Aléatoire

---

# **Effets remarquables des fluctuations aléatoires de l'environnement sur la compétition entre deux espèces**

---

Adrien PRODHOMME, sous la direction de Vincent BANSAYE

Septembre 2017

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Présentation du modèle et propriétés principales</b>	<b>2</b>
1.1 Système compétitif à deux espèces en environnement constant . . . . .	2
1.1.1 Modélisation . . . . .	2
1.1.2 Dynamique . . . . .	3
1.1.3 Exemple : Le système de Lotka-Volterra . . . . .	5
1.2 Alternance environnementale . . . . .	6
1.2.1 Description du modèle . . . . .	6
1.2.2 Construction mathématique du processus $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . . . . .	8
1.3 Comportement en temps long : propriétés principales . . . . .	11
<b>2 Caractéristiques du processus et liens avec la chaîne squelette</b>	<b>15</b>
2.1 Support de la loi des trajectoires . . . . .	15
2.2 Accessibilité . . . . .	17
2.3 Lois invariantes . . . . .	18
<b>3 Dynamiques en temps long</b>	<b>21</b>
3.1 Cas d'une seule espèce . . . . .	21
3.2 Inégalités de dérive . . . . .	22
3.3 Extinctions . . . . .	24
3.4 Persistance . . . . .	30
<b>4 Persistance : topologie de <math>\Gamma</math></b>	<b>40</b>
<b>Et après ?</b>	<b>50</b>
<b>Remerciements</b>	<b>50</b>
<b>Références</b>	<b>51</b>
<b>Annexe A Irréductibilité, conditions de Doeblin et critères d'Hörmander</b>	<b>52</b>
A.1 Irréductibilité . . . . .	52
A.2 Conditions de Doeblin, critères d'Hörmander . . . . .	54
<b>Annexe B Preuves diverses</b>	<b>60</b>
<b>Annexe C Persistance potentielle : réalisation</b>	<b>70</b>
<b>Annexe D Résultats classiques</b>	<b>72</b>
<b>Index des notations</b>	<b>75</b>

# Introduction

Le présent mémoire est consacré à l'étude mathématique d'un modèle de compétition entre deux espèces, introduit et développé dans ses idées principales par Michel Benaïm et Claude Lobry dans un article intitulé *Lotka-Volterra with randomly fluctuating environments or "How switching between beneficial environments can make survival harder"*, publié en 2016 dans The Annals of Applied Probability (référence bibliographique [BL16]). Il est remarquable de voir à quel point une hypothèse simple, celle de la fluctuation aléatoire de l'environnement, est capable d'enrichir la dynamique, par rapport à des modèles compétitifs de type Lotka-Volterra, où l'environnement est constant. Quand bien même l'une des espèces serait amenée, dans chaque environnement parmi un jeu donné, à s'éteindre si l'environnement restait fixé, nous verrons que « tout est rendu possible » par la fluctuation environnementale : de l'extinction de ladite espèce à l'extinction de l'autre espèce, en passant par une coexistence stable (ou persistance). Nous avons travaillé à élargir sensiblement le cadre développé dans l'article [BL16], ce qui a nous a permis de découvrir un nouveau comportement potentiel du système, ainsi qu'à approfondir certains aspects de l'étude.

Le corps principal de ce mémoire est découpé en quatre parties. La partie 1 est consacrée à la présentation du modèle et à sa matérialisation mathématique sous la forme d'un processus markovien, ainsi qu'à l'exposition de ses possibilités dynamiques en temps long, dont les démonstrations sont ensuite données dans la partie 3. Entretemps, la partie 2 caractérise le support de la loi du processus et donne de nombreux résultats utiles sur ses lois invariantes. Quant à la partie 4, elle s'intéresse aux caractéristiques topologiques de ce qui constitue l'ensemble  $\omega$ -limite des trajectoires du processus lorsqu'il y a persistance, et constitue un approfondissement notable par rapport à ce qui est présenté dans [BL16]. Dans l'annexe A, on trouvera l'appui conceptuel et théorique indispensable aux résultats de la partie 3. Ensuite on pourra trouver, en annexes B et C respectivement, des démonstrations et un développement dont on a estimé qu'ils pouvaient apesantir une première lecture. Enfin, l'annexe D contient un certain nombre de résultats classiques utilisés dans ce travail et provenant notamment de la théorie des systèmes dynamiques et de celle des chaînes de Markov.

## 1 Présentation du modèle et propriétés principales

### 1.1 Système compétitif à deux espèces en environnement constant

#### 1.1.1 Modélisation

Nous allons étudier un système constitué de deux espèces,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , dont on représente les tailles de population par deux réels positifs<sup>1</sup> évoluant avec le temps,  $x(t)$  et  $y(t)$ . Les deux espèces ont une tendance naturelle à croître, mais disposent de ressources limitées (en nourriture, en eau, en ensoleillement par exemple). On suppose que les deux espèces ne sont pas dans un rapport de prédation l'une avec l'autre, mais qu'elles doivent se partager au moins une partie des ressources. Par conséquent, deux facteurs viennent limiter leur croissance :

- la compétition intraspécifique d'une part, qui a lieu entre les individus au sein de chaque espèce ;
- la compétition interspécifique d'autre part, entre les individus d'espèces distinctes.

Dans un environnement<sup>2</sup> constant, on peut proposer une loi d'évolution sous la forme d'une équation différentielle autonome :

$$\begin{cases} \dot{x} = xH_{\mathbf{x}}(x, y), \\ \dot{y} = yH_{\mathbf{y}}(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

---

1. Implicitement, nous travaillons donc avec des populations assez grandes.

2. Entre autres choses, le débit total disponible en ressources, la structure du milieu, la température, le pH...

où  $H_{\mathbf{x}}$  et  $H_{\mathbf{y}}$  représentent des taux de croissance par individu (positifs ou négatifs). Dans ce cadre, à chaque instant la contribution moyenne des individus à l'évolution démographique de leur espèce est déterminée par la taille des populations<sup>3</sup>. De plus, le milieu est fermé à l'immigration : toute extinction est définitive.

Pour le confort mathématique, on suppose que les fonctions  $H_{\mathbf{x}}$  et  $H_{\mathbf{y}}$  sont lisses, c'est-à-dire qu'il existe un ouvert  $\mathcal{U}$  contenant  $(\mathbb{R}_+)^2$  tel que  $H_{\mathbf{x}}, H_{\mathbf{y}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ . On fait les hypothèses suivantes pour chaque espèce  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$  :

(H1)  $H_{\mathbf{h}}(0, 0) > 0$  ;

(H2)  $\partial_x H_{\mathbf{h}} < 0$  et  $\partial_y H_{\mathbf{h}} < 0$  sur  $(\mathbb{R}_+)^2$  ;

(H3) Il existe  $A > 0$  tel que  $H_{\mathbf{h}}(x, y) < 0$  si  $x \geq A$  ou  $y \geq A$ .

L'hypothèse (H1) signifie que lorsque la pression démographique est faible, les populations croissent. Le point (H2) traduit le fait que la compétition, qu'elle soit intraspécifique ou interspécifique, augmente avec les tailles de populations<sup>4</sup>. Enfin, l'hypothèse (H3) implique qu'une fois un certain seuil franchi par  $x$  ou  $y$ , la compétition est suffisamment forte pour réduire la population de chaque espèce.

### 1.1.2 Dynamique

On peut analyser sans difficulté la dynamique du système en s'appuyant sur la configuration des courbes isoclines. Pour  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ , on définit l'isocline  $\text{iso}_{\mathbf{h}}$  par l'équation  $H_{\mathbf{h}} = 0$  sur  $(\mathbb{R}_+)^2$ .

**Proposition 1.1.** *Pour tout  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ , il existe  $0 < x_{\mathbf{h}} < A$  et une fonction lisse  $g_{\mathbf{h}} : [0, x_{\mathbf{h}}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ , nulle en  $x_{\mathbf{h}}$  et strictement décroissante, telle que  $\text{iso}_{\mathbf{h}}$  soit égale au graphe de  $g_{\mathbf{h}}$ .*

**Démonstration.** Voir l'annexe B. ■

Notons  $F : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}^2$  le champ de vecteur associé au système (1), à savoir :

$$F(x, y) = (xH_{\mathbf{x}}(x, y), yH_{\mathbf{y}}(x, y)).$$

Soit  $\Phi$  son flot, tel que pour tout  $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ , la fonction  $t \mapsto \Phi_t(x_0, y_0) = \Phi(t, x_0, y_0)$  soit l'unique solution maximale du problème de Cauchy associé au système (1) et à la condition initiale  $(x_0, y_0)$ . Le flot  $\Phi$  est défini sur un ouvert  $\mathcal{U}_{\Phi} \subseteq \mathbb{R} \times \mathcal{U}$  et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur cet ouvert (voir par exemple [Tes12, Theorem 2.10]). Bien sûr, le quadrant  $(\mathbb{R}_+)^2$  est positivement invariant par le flot<sup>5</sup>. Mieux, pour toute condition initiale  $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+)^2$ , c'est aussi le cas du carré  $[0, x_0 \vee A] \times [0, y_0 \vee A]$ , car le champ est entrant sur ses arêtes supérieure et droite. La compacité de ce domaine implique que  $\mathbb{R}_+ \times \{(x_0, y_0)\} \subseteq \mathcal{U}_{\Phi}$ .

Nous pouvons d'ores et déjà identifier trois points d'équilibre du champ  $F : (0, 0), (x_{\mathbf{x}}, 0)$  et  $(0, y_{\mathbf{y}})$ , où  $y_{\mathbf{y}}$  est l'unique zéro de  $H_{\mathbf{y}}(0, \cdot)$ , i.e.  $y_{\mathbf{y}} = g_{\mathbf{y}}(0)$ . L'origine est instable, c'est une source en raison de l'hypothèse (H1). Etant donné une condition initiale  $(x_0, 0)$  avec  $x_0 > 0$ ,  $y(t)$  reste nulle et  $x(t)$  converge vers  $x_{\mathbf{x}}$ . C'est une conséquence du fait que

$$\forall x > 0, \quad \text{sgn}(F_x(x, 0)) = \text{sgn}(x_{\mathbf{x}} - x).$$

De même, si l'on part de  $(0, y_0)$  avec  $y_0 > 0$ , alors  $x(t) \equiv 0$  et  $y(t) \rightarrow y_{\mathbf{y}}$ .

Cela étant dit, la situation qui nous intéresse véritablement est celle où les deux espèces coexistent

---

3. Il s'agit donc d'un modèle dans lequel la loi des grands nombres intervient pour gommer la variabilité individuelle. La remarque faite dans la note 1 s'en trouve soulignée.

4. Dans ce cadre il n'y a donc pas de coopération entre les individus.

5. On dit qu'un domaine  $D \subseteq \mathcal{U}$  est positivement invariant par  $\Phi$  si :  $\forall (t, x, y) \in \mathcal{U}_{\Phi} \cap (\mathbb{R}_+ \times D), \Phi_t(x, y) \in D$ .

au départ. Dans la suite on se donne donc une condition initiale  $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . Les isoclines vont jouer un rôle clef dans la structuration de l'ensemble des dynamiques possibles.

### Premier cas : les isoclines ne s'intersectent pas

Il s'agit d'un cas particulier important. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\text{iso}_x$  est située au-dessus de  $\text{iso}_y$ . Les points d'équilibre identifiés précédemment sont alors les seuls, et  $H_y(0, x_x) < 0$  tandis que  $H_x(0, y_y) > 0$ , ce qui fait de  $(0, x_x)$  un puits et de  $(0, y_y)$  une selle du champ  $F$ . La situation générale est représentée sur la figure 1 (bien entendu les flèches y représentent le champ  $F$ ). Trois zones fermées du quadrant  $(\mathbb{R}_+)^2$  y sont distinguées :  $\mathcal{A}$  la zone sous  $\text{iso}_y$ ,  $\mathcal{B}$  la zone entre les isoclines, et  $\mathcal{C}$  la zone au-dessus et à droite de  $\text{iso}_x$ .

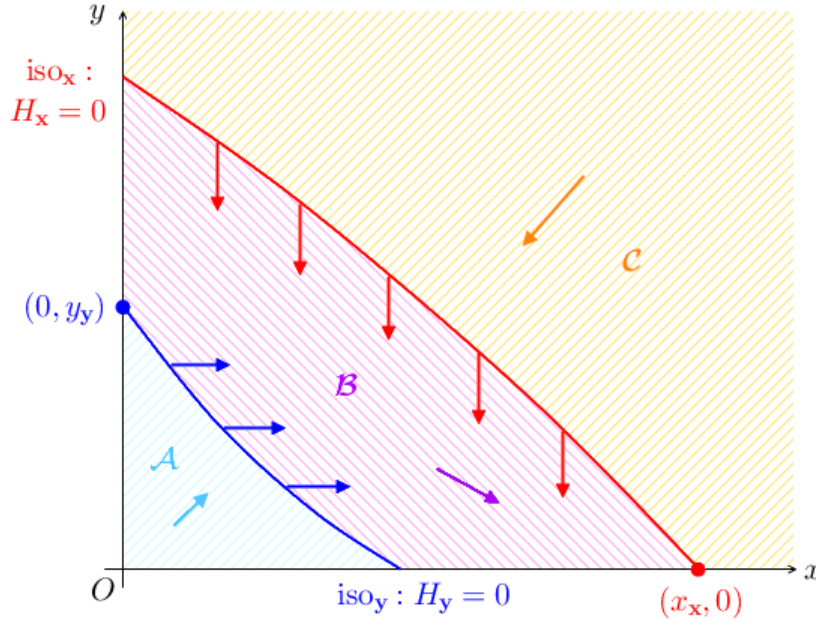


FIGURE 1 – Cas où  $\text{iso}_x$  est située strictement au-dessus de  $\text{iso}_y$ .

Tout d'abord, remarquons qu'au niveau des frontières  $\text{iso}_x$  et  $\text{iso}_y$  de la zone  $\mathcal{B}$ , le champ  $F$  est entrant. Ceci a pour conséquence que  $\mathcal{B}$  est positivement invariant par le flot. Si  $(x_0, y_0) \in \mathcal{B}$ , alors  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y(t)$  sont respectivement croissante et décroissante et par conséquent le système converge, ce qui se fait nécessairement vers un point d'équilibre du champ<sup>6</sup>. Or on a  $H_x(0, y_y) > 0$ , ce qui rend impossible la convergence vers  $(0, y_y)$ , d'où :

$$(x_0, y_0) \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \Phi_t(x_0, y_0) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (x_x, 0).$$

Si  $(x_0, y_0)$  est dans  $\mathcal{A}$  ou  $\mathcal{C}$ , alors :

- soit la trajectoire du système reste dans la même zone, auquel cas les fonctions  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y(t)$  sont monotones à valeurs dans  $[0, x_0 \vee A]$  et  $[0, y_0 \vee A]$ , ce qui implique pour les mêmes raisons qu'auparavant la convergence vers  $(x_x, 0)$ <sup>7</sup> ;

- soit la trajectoire sort de cette zone donc entre dans  $\mathcal{B}$ , auquel cas elle converge aussi vers  $(x_x, 0)$ .

6. En effet, si  $p \in (\mathbb{R}_+)^2$  n'est pas un équilibre, on peut supposer sans perte de généralité que  $\delta := F_x(p) > 0$ , et alors toute courbe intégrale pénétrant dans le voisinage  $\{F_x > \delta/2\} \cap B_1(p)$  en ressort après une durée d'au plus  $4/\delta$ .

7. Bien sûr, en réalité ce cas de figure est impossible pour  $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$ .

Par conséquent, toute condition initiale où coexistent les deux espèces conduit asymptotiquement  $\mathbf{y}$  à son extinction et  $\mathbf{x}$  à son équilibre propre  $x_{\mathbf{x}}$ . Il s'agit d'un cadre d'application du principe d'exclusion compétitive de Gause (voir [Gau32]). **Nous qualifierons par la suite ce type d'environnement, c'est-à-dire de champ, de favorable à l'espèce  $\mathbf{x}$  (et défavorable à l'espèce  $\mathbf{y}$ ).**

### Second cas : les isoclines s'intersectent

Dans ce cas, de nouveaux points d'équilibre du champ apparaissent, précisément au niveau des intersections entre les isoclines. Nous nous plaçons dans le cadre générique où ces intersections se font de façon transverse et en-dehors des axes. La situation est représentée sur la figure 2.

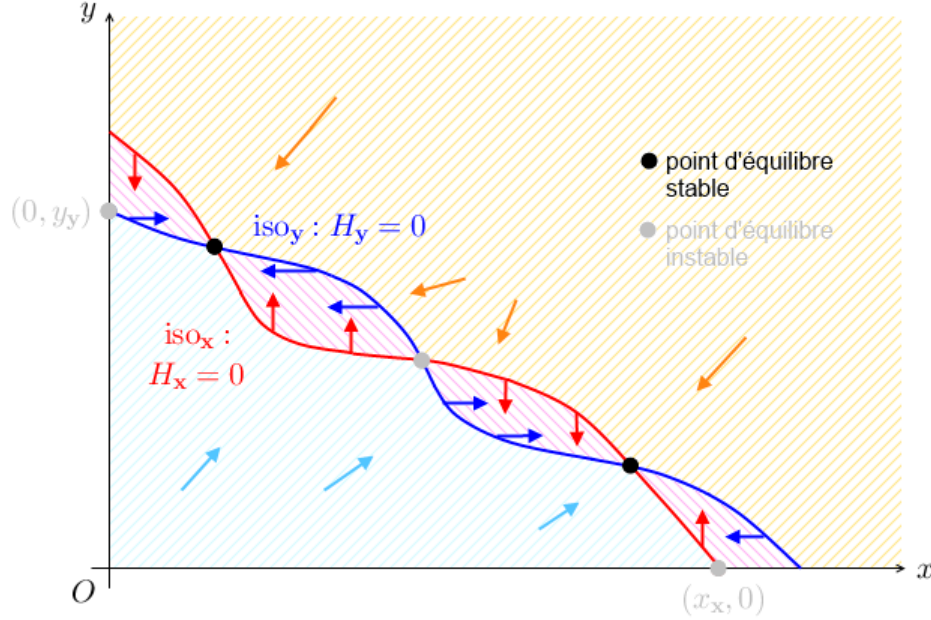


FIGURE 2 – Cas générique où les isoclines s'intersectent.

Sur cette figure on voit une alternance de puits et de selles. Toute condition initiale conduit à la convergence vers un point d'équilibre<sup>8</sup>. Selon les cas, cela peut être un état de coexistence entre les espèces ou d'extinction de l'une au profit de l'autre.

#### 1.1.3 Exemple : Le système de Lotka-Volterra

L'exemple le plus classique de système compétitif de deux espèces est celui de Lotka-Volterra. Il consiste à choisir de simples fonctions linéaires de  $x$  et  $y$  pour les taux de croissance par tête :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \begin{cases} H_{\mathbf{x}}(x, y) = \alpha(1 - ax - by), \\ H_{\mathbf{y}}(x, y) = \beta(1 - cx - dy). \end{cases}$$

Le coefficient  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) est homogène à une fréquence et représente le taux de croissance de  $\mathbf{x}$  (resp.  $\mathbf{y}$ ) dans la limite  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Le coefficient  $a$  (resp.  $d$ ) est représentatif de la compétition intraspécifique au sein de l'espèce  $\mathbf{x}$  (resp.  $\mathbf{y}$ ), tandis que le coefficient  $b$  (resp.  $c$ ) traduit la pression compétitive exercée par l'espèce  $\mathbf{y}$  sur l'espèce  $\mathbf{x}$  (resp. par l'espèce  $\mathbf{x}$  sur l'espèce  $\mathbf{y}$ ). L'équilibre propre de l'espèce  $\mathbf{x}$

<sup>8</sup>. Le bassin d'attraction, appelé variété stable, est un ouvert de  $\mathcal{U}$  pour les puits, et une courbe lisse pour les points selles (voir la section intitulée "Variétés stable et instable" dans l'annexe D).

(resp.  $\mathbf{y}$ ) en cas d'absence de l'autre espèce se situe en  $(1/a, 0)$  (resp.  $(0, 1/d)$ ). Les isoclines sont de simples segments de droites. L'environnement est favorable à l'espèce  $\mathbf{x}$  lorsque  $a < c$  et  $b < d$ , c'est-à-dire quand  $\mathbf{x}$  subit une pression compétitive venant de chaque espèce moins forte que celle ressentie par  $\mathbf{y}$ . Lorsque les inégalités sont dans l'autre sens, l'environnement est favorable à  $\mathbf{y}$ . Il y a deux autres situations génériques possibles :

- $a > c$  et  $b < d$  : la compétition interspécifique est dominée par la compétition intraspécifique, auquel cas toutes les conditions initiales dans  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  conduisent vers un unique équilibre  $(x_e, y_e)$  où les espèces coexistent ;

- $a < c$  et  $b > d$  : la compétition interspécifique l'emporte sur la compétition intraspécifique, et  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  est scindé en deux zones par la courbe instable associée à l'unique point d'équilibre du quadrant ouvert ; les conditions initiales situées en-dessous (resp. au-dessus) de cette courbe conduisent vers  $(1/a, 0)$  (resp.  $(0, 1/d)$ ).

## 1.2 Alternance environnementale

Dans la section précédente, nous avons vu que la dynamique des populations en environnement constant se résume à la convergence vers un équilibre, où l'une des espèces peut avoir disparu, notamment lorsque l'environnement est favorable à une espèce (principe de Gause). Cependant, l'hypothèse d'un environnement pouvant être considéré constant à des échelles de temps grandes du point de vue de l'évolution démographique des populations apparaît fragile, en dehors du laboratoire. Par conséquent, il est important de pouvoir tenir compte de variations environnementales. Celles-ci vont complexifier la dynamique et faire naître des phénomènes intéressants, voire contre-intuitifs.

Le cas de variations périodiques<sup>9</sup> a été étudié à plusieurs reprises (voir notamment [Koc74, Cus80, dMS81]). Par exemple, le résultat intéressant suivant est établi dans [dMS81] : sous un environnement  $T$ -périodique  $F(t)$ , dont le champ moyen est favorable à l'espèce  $\mathbf{x}$ , on peut obtenir une orbite  $T$ -périodique localement attractive, avec coexistence des deux espèces.

On peut également autoriser l'environnement à alterner entre plusieurs configurations possibles, en prenant  $t \mapsto F(t)$  constante par morceaux, ce qui est fait dans [LSN94]. Les auteurs y montrent le fait remarquable suivant : en alternant entre deux environnements favorables à l'espèce  $\mathbf{x}$ , il est possible d'obtenir asymptotiquement la coexistence des deux espèces, mais aussi l'extinction de  $\mathbf{x}$  (voir à ce propos la figure 3, tirée de [BL16]).

En ce qui concerne ce mémoire, nous allons reprendre pour une grande part le travail effectué par Michel Benaïm et Claude Lobry dans [BL16], qui consiste à considérer un environnement pouvant alterner, **de façon aléatoire** cette fois, entre différentes configurations favorables à la même espèce  $\mathbf{x}$ . Le cadre sera cependant sensiblement plus général et nous obtiendrons des propriétés supplémentaires. Le contenu original sera signalé à l'occasion. Soulignons également l'importance primordiale, dans la genèse de ce mémoire, de l'article [BBMZ15], complément indissociable de [BL16].

### 1.2.1 Description du modèle

On commence par se donner une famille finie  $(F^i)_{1 \leq i \leq d}$ , avec  $d \geq 2$ , de champs de la forme :

$$\begin{aligned} F^i : \quad \mathcal{U} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (xH_{\mathbf{x}}(x, y, i), yH_{\mathbf{y}}(x, y, i)), \end{aligned}$$

où les fonctions  $H_{\mathbf{x}}(\cdot, i)$  et  $H_{\mathbf{y}}(\cdot, i)$  vérifient les hypothèses (H1), (H2), et (H3) du paragraphe 1.1.1.

---

9. On peut penser aux variations journalières ou saisonnières.

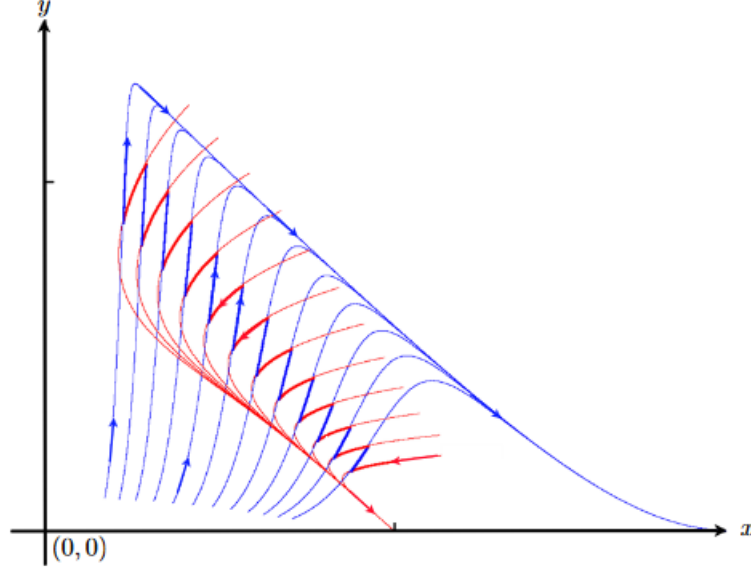


FIGURE 3 – Deux familles de semi-orbites positives associées à des champs favorables à  $\mathbf{x}$  : en alternant les environnements on peut éteindre  $\mathbf{x}$ .

Dans la suite du mémoire, on supposera que les champs sont fixés, et qu'ils sont **tous favorables à l'espèce  $\mathbf{x}$** <sup>10</sup>.

Nous désignerons par  $\mathcal{E} = \{1, \dots, d\}$  l'ensemble des indices paramétrant l'environnement. Pour tout  $i \in \mathcal{E}$ , nous noterons  $\Phi^i$  le flot, et  $(x_i, 0)$  (resp.  $(0, y_i)$ ) l'unique point d'équilibre situé sur  $\mathbb{R}_+^* \times \{0\}$  (resp.  $\{0\} \times \mathbb{R}_+^*$ ), du champ  $F^i$ . Nous ferons l'hypothèse générique que tous les  $x_i$  (resp.  $y_i$ ) sont distincts. Pour tout  $i \in \mathcal{E}$ , le point  $(x_i, 0)$  est un puits du champ  $F^i$ , tandis que  $(0, y_i)$  est une selle. On définit  $x_{\min} = \min_{i \in \mathcal{E}} x_i$ ,  $x_{\max} = \max_{i \in \mathcal{E}} x_i$ , et  $y_{\min}, y_{\max}$  de la même manière. Enfin on note  $i_{\min}, i_{\max}$  (resp.  $j_{\min}, j_{\max}$ ) les environnements associés à  $x_{\min}$  et  $x_{\max}$  (resp.  $y_{\min}$  et  $y_{\max}$ ).

L'état du système à un instant  $t \in \mathbb{R}_+$  quelconque est décrit non seulement par les tailles de populations mais aussi par l'environnement. On l'inscrit donc dans une variable aléatoire  $Z_t = (X_t, Y_t, I_t)$  à valeurs dans  $(\mathbb{R}_+)^2 \times \mathcal{E}$ . On fait le choix de décrire l'évolution de l'environnement par un processus càdlàg<sup>11</sup>, effectuant des sauts en respectant la loi :

$$\mathbb{P}[I_{t+s} = j \mid (X_u, Y_u, I_u)_{0 \leq u \leq t}, I_t = i] = \lambda_{i,j}(X_t, Y_t) s + o(s)$$

pour tous  $i, j \in \mathcal{E}$  distincts et  $t, s \in \mathbb{R}_+$ , où les fonctions  $\lambda_{i,j} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  sont continues et représentent des taux de saut, dépendant a priori des tailles de populations<sup>12</sup>. De plus, on fait l'hypothèse d'irréductibilité des transitions environnementales : pour tous  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$  et  $i, j \in \mathcal{E}$  distincts, il existe une chaîne d'indices  $(i_0 = i, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n = j)$  tous distincts telle que  $\prod_{k=0}^{n-1} \lambda_{i_k, i_{k+1}}(x, y) > 0$ . Quant aux populations, elles évoluent selon la loi  $(\dot{X}_t, \dot{Y}_t) = F^{I_t}(X_t, Y_t)$ , où la dérivée est à droite. Nous allons donner un tour plus rigoureux à tout cela dans le paragraphe suivant.

11. Continu à droite avec limites à gauche.

12. Il s'agit d'une généralisation supplémentaire par rapport à [BL16]. C'est toutefois le cadre d'étude dans [BBMZ15].



### 1.2.2 Construction mathématique du processus $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$

#### Restriction à un compact

Tout d'abord, nous allons nous faciliter la tâche en nous restreignant à un domaine compact au sein duquel le processus  $(Z_t) = (X_t, Y_t, I_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  évolue nécessairement à partir d'un certain temps, s'il satisfait à la description du paragraphe précédent avec  $(X_0, Y_0) \neq (0, 0)$ .

La condition (H1) vérifiée par les taux de croissance permet de trouver  $0 < a < A$  tel que pour tout  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ ,  $H_{\mathbf{h}}$  admette un infimum  $\varepsilon_{\mathbf{h},a} > 0$  sur  $[0, a]^2 \times \mathcal{E}$ .

**Proposition 1.2.** *Posons  $M = [0, A]^2 \setminus [0, a]^2$ . Si  $(X_0, Y_0) = (x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , alors à partir d'un certain temps,  $(X_t, Y_t) \in M$ .*

**Démonstration.** Voir l'annexe B. ■

Comme on souhaite étudier la dynamique en temps long, on pourra supposer sans perte de généralité que  $(X_0, Y_0) \in M$ . Nous noterons  $M_0^{\mathbf{x}}$  (resp.  $M_0^{\mathbf{y}}$ ) l'intersection de  $M$  avec le demi-axe des ordonnées (resp. des abscisses)<sup>13</sup>, et nous l'appellerons frontière ou ensemble d'extinction de l'espèce  $\mathbf{x}$  (resp.  $\mathbf{y}$ ). On notera  $M_0 = M_0^{\mathbf{x}} \cup M_0^{\mathbf{y}}$ . Enfin, on utilisera les abréviations suivantes :  $\mathbf{M} = M \times \mathcal{E}$ ,  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = M_0^{\mathbf{x}} \times \mathcal{E}$ ,  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}} = M_0^{\mathbf{y}} \times \mathcal{E}$  et  $\mathbf{M}_0 = M_0 \times \mathcal{E}$ .

Nous allons construire le processus  $(Z_t)$ , en nous restreignant au cas où il prend ses valeurs dans le compact  $\mathbf{M}$ .

De façon préliminaire, remarquons que par compacité de  $M$  et continuité des fonctions  $\lambda_{i,j}$ , on peut trouver  $\lambda > 0$  tel que

$$\max_{(p,i) \in M} \sum_{j \neq i} \lambda_{i,j}(p) < \lambda. \quad (2)$$

Dès lors, si l'on pose pour tous  $p \in M$  et  $i, j \in \mathcal{E}$  :

$$Q(p, i, j) = \frac{\lambda_{i,j}(p)}{\lambda} \text{ si } i \neq j \quad \text{et} \quad Q(p, i, i) = 1 - \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq i} \lambda_{i,j}(p) > 0,$$

alors la matrice  $(Q(p, i, j))_{1 \leq i, j \leq d}$  est **stochastique, irréductible et apériodique**. On s'autorisera un léger abus de notation en désignant également par  $Q$  le noyau sur  $\mathbf{M}$  associé à la transition suivante : à partir de  $(p, i) \in \mathbf{M}$ , on change  $i$  en  $j$  avec probabilité  $Q(p, i, j)$ . Autrement dit, son action sur une fonction  $g : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée quelconque est donnée par :

$$\forall (p, i) \in \mathbf{M}, \quad Qg(p, i) = \sum_{j \in \mathcal{E}} Q(p, i, j)g(p, j).$$

#### La chaîne squelette

Tout d'abord, remarquons que pour construire le processus  $(Z_t)$ , il suffit de construire ses sauts, la dynamique intermédiaire étant déterministe. On peut faire cela de la manière algorithmique proposée dans [BBMZ15, §2.1], qui consiste à commencer par proposer des instants de saut à un taux  $\lambda$ , ce qui nous fournit des sauts en excès selon (2), avant de procéder à un « raffinement ».

Dans un premier temps, nous allons donc construire une chaîne de Markov  $(\tilde{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , qui servira ensuite de squelette au processus. Elle s'interprétera comme un échantillonnage du processus  $Z_t$  aux instants de saut d'un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ . On commence par se donner un espace de

---

13. On a donc  $M_0^{\mathbf{x}} = \{0\} \times [a, A]$  et  $M_0^{\mathbf{y}} = [a, A] \times \{0\}$ .

probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , sur lequel sont définies une variable aléatoire  $\tilde{Z}_0 = (\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0, \tilde{I}_0)$  à valeurs dans  $\mathbf{M}$ , une famille  $(U_n)_{n \geq 1}$  de variables exponentielles de paramètre  $\lambda$ , ainsi qu'une famille  $(V_n)_{n \geq 1}$  de variables uniformes sur  $[0, 1]$ , toutes ces variables étant indépendantes. On pose  $T_0 = 0$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $T_n = \sum_{k=1}^n U_k$ . Remarquons que quitte à remplacer  $\Omega$  par un sous-ensemble de probabilité 1, on peut supposer que pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n(\omega) = +\infty$ . On définit enfin  $\tilde{Z}_n = (\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, \tilde{I}_n)$  pour tout  $n \geq 1$  par récurrence en posant :

$$(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n) = \Phi_{U_n}^{\tilde{I}_{n-1}}(\tilde{X}_{n-1}, \tilde{Y}_{n-1}), \quad (3)$$

$$\tilde{I}_n = G_{V_n}(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, \tilde{I}_{n-1}), \quad (4)$$

où  $G_v(x, y, i)$  désigne, pour tous  $v \in [0, 1]$ ,  $(x, y) \in \mathbf{M}$  et  $i \in \mathcal{E}$ , l'unique  $j \in E$  tel que

$$v \in \left[ \sum_{1 \leq k < j} Q(x, y, i, k), \sum_{1 \leq k \leq j} Q(x, y, i, k) \right[.$$

L'étape (3) correspond à l'évolution déterministe entre les sauts, dans l'environnement  $\tilde{I}_{n-1}$ , tandis que l'étape (4) correspond au changement éventuel d'environnement à  $T_n$  : il s'agit du « raffinement » auquel nous faisons allusion plus haut. Il est important de remarquer que le saut d'environnement est possiblement fictif (i.e.  $\tilde{I}_n = \tilde{I}_{n-1}$ ).

On pose également, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}_n = \sigma(\tilde{Z}_0, U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n)$ . Enfin, soient  $(K_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  le semi-groupe de transition (déterministe) et  $\tilde{K}$  le noyau définis par :

$$K_t g(x, y, i) = g(\Phi_t^i(x, y), i) \quad \text{et} \quad \tilde{K} = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} K_s ds,$$

pour tous  $(x, y, i) \in \mathbf{M}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $g : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée. Tout est en place en vue de la proposition suivante.

**Proposition 1.3.** *Le processus  $(\tilde{Z}_n)$  est une  $(\tilde{\mathcal{F}}_n)$ -chaîne de Markov de noyau de transition  $\tilde{P} = \tilde{K}Q$ .*

**Démonstration.** Soit  $n \geq 1$ . La  $\tilde{\mathcal{F}}_n$ -mesurabilité de  $(\tilde{Z}_n)$  se prouve sans problème par récurrence. Nous avons construit la transition de  $\tilde{Z}_{n-1}$  à  $\tilde{Z}_n$  en deux temps : une première transition de  $\tilde{Z}_{n-1}$  à  $(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, \tilde{I}_{n-1})$ , donnée par (3), suivie d'une seconde transition vers  $\tilde{Z}_n$ , correspondant à (4). Soit  $h : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable bornée. Comme  $U_n$  est indépendante de  $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [h(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, \tilde{I}_{n-1}) \mid \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}] &= \mathbb{E} \left[ h(\Phi_{U_n}^{\tilde{I}_{n-1}}(\tilde{X}_{n-1}, \tilde{Y}_{n-1}), \tilde{I}_{n-1}) \mid \tilde{\mathcal{F}}_{n-1} \right] \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} h(\Phi_u^{\tilde{I}_{n-1}}(\tilde{X}_{n-1}, \tilde{Y}_{n-1}), \tilde{I}_{n-1}) du \\ &= \tilde{K}h(\tilde{X}_{n-1}, \tilde{Y}_{n-1}, \tilde{I}_{n-1}). \end{aligned}$$

La première étape est donc associée au noyau de transition  $\tilde{K}$ . Ensuite,  $(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, \tilde{I}_{n-1})$  est mesurable par rapport à  $\sigma(\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}, U_n)$ , et on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [h(\tilde{Z}_n) \mid \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}, U_n] &= \mathbb{E} [h(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, G_{V_n}(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, \tilde{I}_{n-1})) \mid \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}] \\ &= \int_0^1 h(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, G_v(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, \tilde{I}_{n-1})) dv \\ &= Qh(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, \tilde{I}_{n-1}). \end{aligned}$$

La seconde étape est donc associée à  $Q$ . On déduit la proposition en combinant les deux transitions. ■

**Le processus**  $(Z_t)$

Dans la suite nous noterons pour tous  $u \in \mathbb{R}_+$ ,  $v \in [0, 1[$ ,  $(x, y) \in M$  et  $i \in E$  :

$$f_u(x, y, i) = (\Phi_u^i(x, y), i) \quad \text{et} \quad g_v(x, y, i) = (x, y, G_v(x, y, i)).$$

On définit le processus càdlàg  $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  par interpolation à partir de la chaîne  $(\tilde{Z}_n)$  en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [T_n, T_{n+1}[ , \quad Z_t = \left( \Phi_{t-T_n}^{\tilde{I}_n}(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n), \tilde{I}_n \right),$$

ainsi que la filtration<sup>14</sup>  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathcal{F}_t = \{ \mathcal{A} \in \mathcal{F} : \forall n \in \mathbb{N}, \exists \mathcal{A}_n \in \tilde{\mathcal{F}}_n, \mathcal{A} \cap \{T_n \leq t < T_{n+1}\} = \mathcal{A}_n \cap \{T_n \leq t < T_{n+1}\} \}.$$

**Proposition 1.4.** *Le processus  $(Z_t)$  est un  $(\mathcal{F}_t)$ -processus de Markov, de semi groupe de transition  $(P_t)$  donné par :*

$$P_t h(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}} h \circ f_{t-T_n} \circ g_{V_n} \circ f_{U_n} \circ \dots \circ g_{V_1} \circ f_{U_1}(z) \right], \quad (5)$$

pour tous  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $h : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée et  $z \in \mathbf{M}$ .

**Démonstration.** Par construction, le processus  $(Z_t)$  est  $(\mathcal{F}_t)$ -adapté. Pour tous  $t, s \in \mathbb{R}_+$ , on a :

$$Z_{t+s} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}} \sum_{p \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{T_{n+p} \leq t+s < T_{n+p+1}\}} f_{t+s-T_{n+p}} \circ g_{V_{n+p}} \circ f_{U_{n+p}} \circ \dots \circ g_{V_{n+1}} \circ f_{T_{n+1}-t}(Z_t).$$

Soient  $h : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée et  $n \in \mathbb{N}$ . Sur l'événement  $\{T_n \leq t < T_{n+1}\}$ , on a :

$$h(Z_{t+s}) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{T_{n+p}-t \leq s < T_{n+p+1}-t\}} h \circ f_{s-(T_{n+p}-t)} \circ g_{V_{n+p}} \circ f_{U_{n+p}} \circ \dots \circ g_{V_{n+1}} \circ f_{T_{n+1}-t}(Z_t).$$

Or, conditionnellement à  $\{T_n \leq t < T_{n+1}\} \in \mathcal{F}_t$ , les propriétés suivantes sont vérifiées<sup>15</sup> :

- ★  $\sigma(T_{n+1}-t, U_{n+2}, U_{n+3}, \dots), \sigma(V_{n+1}, V_{n+2}, \dots)$  et  $\mathcal{F}_t$ <sup>16</sup> sont mutuellement indépendantes ;
- ★  $T_{n+1}-t, U_{n+2}, U_{n+3}, \dots$  sont des variables exponentielles de paramètre  $\lambda$  indépendantes ;
- ★  $V_{n+1}, V_{n+2}, \dots$  sont des variables uniformes sur  $[0, 1[$  indépendantes.

Ceci nous permet d'utiliser l'équation définitionnelle (5), qui donne :

$$\mathbb{E} [h(Z_{t+s}) \mathbf{1}_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}} | \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}} P_s h(Z_t),$$

puis en sommant sur  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbb{E} [h(Z_{t+s}) | \mathcal{F}_t] = P_s h(Z_t).$$

L'ensemble de la proposition est démontré car cette égalité implique aussi que  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un semi-groupe de transition. ■

14. On laisse le lecteur vérifier le fait que  $(\mathcal{F}_t)$  ainsi définie constitue bien une filtration. Cela tient essentiellement au fait que pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq s \leq t$ , on a  $\{T_n \leq s < T_{n+1}\} \cap \{T_n \leq t < T_{n+1}\} = \{T_n \leq s\} \cap \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$ , et que  $\{T_n \leq s\} \in \tilde{\mathcal{F}}_n$ .

15. Les deux premières utilisent le fait que les variables exponentielles sont sans mémoire.

16. Plus précisément sa trace sur  $\{T_n \leq t < T_{n+1}\}$ , qui se confond par définition avec celle de  $\tilde{\mathcal{F}}_n$ .

**Définition 1.5.** On dit qu'un **noyau markovien**  $R$  sur  $\mathbf{M}$  est **fellerien** si pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}(\mathbf{M})$ ,  $Rf \in \mathcal{C}(\mathbf{M})$ .

On dit qu'un **semi-groupe de transition**  $(R_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  sur  $\mathbf{M}$  est **fellerien** si pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , le noyau  $R_t$  est fellerien, et si de plus :

- ★ pour tout borélien  $B \subseteq \mathbf{M}$ , l'application  $\mathbb{R}_+ \times \mathbf{M} \ni (t, z) \mapsto R_t(z, B)$  est mesurable ;
- ★ pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}(\mathbf{M})$ , on a  $\|R_t f - f\|_\infty \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow 0$ .

Dans ce cas, le domaine du générateur infinitésimal  $\mathcal{S}$  du semi-groupe, noté  $\text{Dom}(\mathcal{S})$ , est l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{C}(\mathbf{M})$  telles que  $(R_t f - f)/t$  converge uniformément quand  $t \rightarrow 0$ . La limite alors notée  $\mathcal{S}f$  et le générateur infinitésimal est l'application  $\mathcal{S} : \text{Dom}(\mathcal{S}) \ni f \rightarrow \mathcal{S}f \in \mathcal{C}(\mathbf{M})$ .

**Définition 1.6.** On dit que  $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{M}$  si pour tout  $i \in \mathcal{E}$ , l'application  $f^i : \mathbf{M} \ni (x, y) \mapsto f(x, y, i)$  admet des dérivées partielles<sup>17</sup> continues. L'ensemble des fonctions réelles de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{M}$  est noté  $\mathcal{C}^1(\mathbf{M})$ .

**Proposition 1.7.** Le semi-groupe  $(P_t)$  est fellerien, de même que  $\tilde{P}$ , et vérifie pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :

$$P_t = e^{-\lambda t} K_t + \sum_{n \geq 1} \lambda^n e^{-\lambda t} \int_{\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^n : \sum_i u_i \leq t\}} \left( K_{u_1} Q K_{u_2} Q \dots K_{u_n} Q K_{t - \sum_i u_i} \right) du_1 \dots du_n. \quad (6)$$

De plus le domaine de son générateur infinitésimal  $\mathcal{L}$  contient  $\mathcal{C}^1(\mathbf{M})$ , et pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{M})$  on a :

$$\forall (x, y, i) \in \mathbf{M}, \quad \mathcal{L}f(x, y, i) = Df^i(x, y) \cdot F^i(x, y) + \sum_{j \in \mathcal{E} \setminus \{i\}} \lambda_{i,j}(x, y) [f^j(x, y) - f^i(x, y)]. \quad (7)$$

*Remarque.* Il s'agit du générateur attendu, avec une première composante due à la dynamique déterministe conduite par les champs, et une seconde due aux sauts environnementaux.

**Démonstration.** L'équation (6) est une conséquence de (5) et de résultats classiques sur les processus de Poisson. Pour tous  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $n \in \mathbb{N}$ , conditionnellement à  $\{T_n \leq t < T_{n+1}\}$ , la variable  $\mathbf{U} := (U_1, \dots, U_n)$  est distribuée uniformément sur le simplexe  $\{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n u_i \leq t\}$ . Ce simplexe est de volume  $t^n/n!$ , et  $\mathbb{P}(T_n \leq t < T_{n+1}) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^n/n!$ .

On pourra consulter [BBMZ15, Proposition 2.1] pour le reste de la preuve. ■

### 1.3 Comportement en temps long : propriétés principales

Commençons par introduire quelques objets fondamentaux et notations utiles dans l'analyse asymptotique de la dynamique du système.

**Définition 1.8.** Pour  $t > 0$  et  $n \geq 1$  les **mesures d'occupation empirique**  $\Pi_t$  et  $\tilde{\Pi}_n$ , du processus  $(Z_t)$  et de la chaîne  $(\tilde{Z}_n)$  respectivement, sont définies pour tout borélien  $B$  de  $\mathbf{M}$  par :

$$\Pi_t(B) = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_B(Z_s) ds \quad \text{et} \quad \tilde{\Pi}_n(B) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_B(\tilde{Z}_k).$$

*Remarque.* La quantité  $\Pi_t(B)$  (resp.  $\tilde{\Pi}_n(B)$ ) mesure la proportion de temps passé dans  $B$  par  $(Z_s)_{0 \leq s \leq t}$  (resp.  $(\tilde{Z}_k)_{1 \leq k \leq n}$ ).

---

17. La forme de  $M$  permet bien de définir ces dérivées même sur le bord.

**Définition 1.9.** Etant donné une trajectoire  $t \mapsto (x(t), y(t))$  dans  $(\mathbb{R}_+)^2$ , un ensemble  $B \subseteq (\mathbb{R}_+)^2$  est dit **récurrent** pour la trajectoire si

$$(\cap_{t \in \mathbb{R}_+} \{(x(s), y(s)), s \geq t\}) \cap B \neq \emptyset.$$

L'ensemble  $\omega$ -**limite** de la trajectoire est l'ensemble des points dont tous les voisinages sont récurrents, autrement dit c'est le fermé

$$\cap_{t \in \mathbb{R}_+} \overline{\{(x(s), y(s)), s \geq t\}}.$$

Soit  $D \in \{M, M \setminus M_0, M_{\mathbf{x}}^0, M_{\mathbf{y}}^0\}$ . Dans tous les cas,  $D$  est un domaine positivement invariant par les tous les flots. Cela a pour conséquence que  $\mathbf{D} = D \times \mathcal{E}$  est absorbant pour le semi-groupe  $(P_t)$  ainsi que pour  $\tilde{K}$ . C'est aussi le cas pour  $Q$ , donc pour  $\tilde{P} = \tilde{K}Q$ <sup>18</sup>. Nous noterons  $\mathcal{P}_1(\mathbf{D})$  l'ensemble des mesures de probabilité sur  $\mathbf{D}$ <sup>19</sup>, et  $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{D})$  (resp.  $\tilde{\mathcal{P}}_{inv}(\mathbf{D})$ ) l'ensemble de celles qui sont invariantes par le semi-groupe  $(P_t)$  (resp. par le noyau  $\tilde{P}$ ). De plus, le domaine  $D$  est naturellement associé à une mesure de Lebesgue  $\ell_D$ , bidimensionnelle si  $D \in \{M, M \setminus M_0\}$ , unidimensionnelle si  $D \in \{M_{\mathbf{x}}^0, M_{\mathbf{y}}^0\}$ . On notera  $\ell_{\mathbf{D}}$  et on appellera mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{D}$  la mesure  $\ell_D \otimes (\sum_{i \in \mathcal{E}} \delta_i)$ .

Le théorème suivant, que nous démontrerons plus tard, caractérise le comportement du processus sur les frontières d'extinction.

**Théorème 3.1.** Pour tout  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ , il existe une unique loi  $\mu_{\mathbf{h}} \in \mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M}_0^{\mathbf{h}})$ . De plus :

1. La mesure  $\mu_{\mathbf{h}}$  est absolument continue par rapport à  $\ell_{\mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}}$ .
2. Le support de  $\mu_{\mathbf{h}}$  est  $[x_{min}, x_{max}] \times \{0\} \times \mathcal{E}$  si  $\mathbf{h} = \mathbf{y}$ , et  $\{0\} \times [y_{min}, y_{max}] \times \mathcal{E}$  si  $\mathbf{h} = \mathbf{x}$ .
3. Si  $Z_0 = z_0 \in \mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$ , alors presque sûrement :
  - (a)  $\Pi_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \mu_{\mathbf{h}}$  étroitement<sup>20</sup> ;
  - (b) si  $\mathbf{h} = \mathbf{y}$  (resp.  $\mathbf{x}$ ), l'ensemble  $\omega$ -limite de  $(X_t)$  (resp.  $(Y_t)$ ) est  $[x_{min}, x_{max}]$  (resp.  $[y_{min}, y_{max}]$ ).
4. Il existe  $C, \alpha > 0$  tels que :

$$\forall z \in \mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|\mathbb{P}_z(Z_t \in \cdot) - \mu_{\mathbf{h}}\|_{VT} \leq Ce^{-\alpha t}.$$

**Démonstration.** Voir la section 3.1.

**Définition 1.10.** Pour  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ , on appelle **taux d'invasion moyen** de l'espèce  $\mathbf{h}$  la quantité

$$\Lambda_{\mathbf{h}} := \mu_{\mathbf{h}}(H_{\mathbf{h}}) = \int_{\mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}} H_{\mathbf{h}} d\mu_{\mathbf{h}}.$$

*Remarque.* Si l'on pense au théorème 3.1, cela représente le taux de croissance par individu de l'espèce  $\mathbf{h}$ , moyenné sur un grand intervalle temporel, dans sa limite de faible population (i.e. au voisinage de  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$ ), d'où le nom.

Il s'avère que les taux d'invasion moyens, en faisant des frontières d'extinction  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$  des zones attractives ( $\Lambda_{\mathbf{h}} < 0$ ) ou répulsives ( $\Lambda_{\mathbf{h}} > 0$ ), vont jouer un rôle décisif dans la structuration des possibilités dynamiques du système en temps long.

L'autre facteur clef est la nature de l'ensemble des points accessibles pour le système, noté  $\Gamma$ . On présentera en détail la notion d'accessibilité dans la section 2.2. Disons pour le moment qu'un point

18. Autrement dit pour tous  $z \in \mathbf{D}$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a  $P_t(z, \mathbf{D}) = \tilde{K}(z, \mathbf{D}) = Q(z, \mathbf{D}) = \tilde{P}(z, \mathbf{D}) = 1$ .

19. Nous l'identifierons avec la partie des mesures de probabilité sur  $\mathbf{M}$  qui sont supportées par  $\mathbf{D}$ . Cette identification est un homéomorphisme pour la topologie étroite, ce que l'on peut voir comme une conséquence du théorème de Portmanteau.

20. La note 19 permet de dissoudre l'ambiguïté concernant l'espace,  $\mathcal{P}_1(\mathbf{M})$  ou  $\mathcal{P}_1(\mathbf{M}_0^{\mathbf{h}})$ , dans lequel considérer cette convergence.

$(x_1, y_1)$  est accessible en partant de  $(x_0, y_0)$  s'il est possible de s'en approcher arbitrairement près en composant adéquatement les flots associés aux différents environnements. L'ensemble  $\Gamma$  est constitué des points accessibles à partir de toutes les conditions initiales  $(x_0, y_0) \in M \setminus M_0$ .

Supposons que les espèces  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  coexistent initialement i.e.  $X_0, Y_0 > 0$ . Voici un résumé des résultats qui seront développés dans la partie 3, concernant les dynamiques possibles en temps long.

**a) Cas où  $\Lambda_{\mathbf{y}} < 0$  et  $\Lambda_{\mathbf{x}} > 0$  (théorème 3.3)**

Dans ce cas, de façon presque sûre, il y a extinction de l'espèce  $\mathbf{y}$ , la mesure empirique du processus converge vers  $\mu_{\mathbf{y}}$ , et l'ensemble  $\omega$ -limite de la trajectoire de  $(X_t, Y_t)$  est le segment  $[x_{min}, x_{max}] \times \{0\}$ . De plus le processus converge en loi vers  $\mu_{\mathbf{y}}$ .

**b) Cas où  $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$ ,  $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$  et  $\{0\} \times [y_{min}, y_{max}] \subseteq \Gamma$  (théorème 3.5)**

Presque sûrement, il y a extinction de l'espèce  $\mathbf{x}$ , la mesure empirique du processus converge vers  $\mu_{\mathbf{x}}$ , et l'ensemble  $\omega$ -limite de la trajectoire de  $(X_t, Y_t)$  est le segment  $\{0\} \times [y_{min}, y_{max}]$ . Enfin  $(Z_t)$  converge en loi vers  $\mu_{\mathbf{x}}$ .

**c) Cas où  $\Lambda_{\mathbf{y}} < 0$  et  $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$  (théorème 3.6)**

Presque sûrement, il y a extinction de l'une des deux espèces. Conditionnellement à l'extinction de  $\mathbf{y}$  (resp.  $\mathbf{x}$ ), le processus a le comportement décrit dans le cas **a** (resp. **b**).

**d) Cas où  $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$  et  $\Lambda_{\mathbf{x}} > 0$  (théorème 3.8)**

Dans ce cas il existe une unique loi  $\Pi \in \mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0)$ , et celle-ci est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\ell_{\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0}$ , de support  $\Gamma \times \mathcal{E}$ , et intègre  $(x, y) \mapsto x^{-\theta} + y^{-\theta}$  pour un certain  $\theta > 0$ . Presque sûrement  $\Pi_t$  converge étroitement vers  $\Pi$  et  $\Gamma$  est l'ensemble  $\omega$ -limite de la trajectoire  $(X_t, Y_t)$ . De plus sous certaines conditions de généricité sur les  $F^i$ , pour toute condition initiale  $z_0 \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$ , il y a convergence en variation totale de la loi de  $Z_t$  vers  $\Pi$ .

**e) Cas où  $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$ ,  $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$  et  $\Gamma \cap M_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$  (théorème 3.10)**

Il existe une unique loi  $\Pi \in \mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0)$ , et celle-ci est absolument continue par rapport à  $\ell_{\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0}$ , de support  $\Gamma \times \mathcal{E}$ , et intègre  $y \mapsto y^{-\theta}$  pour un certain  $\theta > 0$ . Presque sûrement on a soit extinction de l'espèce  $\mathbf{x}$ , soit convergence de la mesure empirique vers  $\Pi$ . Conditionnellement au premier cas (resp. au second cas), le processus a le comportement du cas **b** (resp. **d**). L'extinction de  $\mathbf{x}$  n'est possible que pour certaines conditions initiales.

*Remarque.* Les cas **a** et **b** sont symétriques dans leurs conclusions, mais le cas **b** nécessite une hypothèse supplémentaire. Nous verrons qu'en réalité l'inclusion  $[x_{min}, x_{max}] \times \{0\} \subseteq \Gamma$  est toujours vérifiée, ce qui est une conséquence du fait que tous les environnements sont favorables à  $\mathbf{x}$ . En revanche, l'hypothèse  $\{0\} \times [y_{min}, y_{max}] \subseteq \Gamma$  peut ou non être vérifiée, ce qui crée une dichotomie entre les cas **b** et **e**<sup>21</sup>.

En dehors du cas **a**, qui correspond à l'extinction de l'espèce défavorisée comme dans le cadre déterministe, nous voyons donc que l'hypothèse d'environnements tous favorables à une même espèce peut mener à des comportements asymptotiques divers, allant de la coexistence stable des espèces, dans les cas **d** et **e**, à l'extinction de l'espèce pourtant a priori favorisée, dans les cas **b**, **c** et **e**. À jeu d'environnements et taux de saut fixés, on peut même avoir plusieurs possibilités pour certaines conditions initiales (cas **c** et **e**).

21. Nous verrons dans la proposition 2.10 qu'on a soit  $\Gamma \cap M_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$ , soit  $\Gamma \supseteq \{0\} \times [y_{min}, y_{max}]$ .

Dans les cas **d** et **e**, où il y a persistance au moins potentielle des deux espèces, la topologie du support de  $\Pi$  dépend directement de celle de  $\Gamma$ , d'où l'importance d'en comprendre les propriétés principales. C'est l'objet d'une investigation poussée dans le théorème 4.7.

Bien sûr nous devons nous demander si ces cinq cas théoriques<sup>22</sup> sont tous effectivement possibles. Tout d'abord, quels que soient les champs  $F^i$ , le cas **a** (extinction de **y**) peut toujours être obtenu en choisissant les taux de saut de façon à ce qu'un environnement "domine" les autres, au sens où le processus **y** passe l'essentiel de son temps : c'est ce que montre la proposition 1.11 ci-dessous, lorsque l'on choisit  $u$  petit. En ce qui concerne les autres cas, ils peuvent ou non être obtenus, suivant la collection d'environnements que l'on se donne. Des exemples correspondant aux cas **b**, **c** et **d** sont donnés dans [BL16]. Le cas **e** est pour sa part une nouveauté de ce mémoire. Dans l'annexe C, nous en donnons la raison, puis nous expliquons comment construire un exemple satisfaisant les hypothèses du cas **e**, avec deux environnements qui ne sont pas de type Lotka-Volterra et des taux de saut constants. Cette construction repose sur la proposition 1.12 ci-après.

**Proposition 1.11** (Environnement dominant). *Soit  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Pour tout  $u > 0$ , on se donne des taux de saut  $(\lambda_{j,k}^u)_{j,k \in \mathcal{E}, j \neq k}$  indépendants des tailles de populations, vérifiant :*

$$\lambda_{j,k}^u = \begin{cases} u & \text{si } j = i, \\ 1 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

*Pour tout  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ , on note  $\mu_{\mathbf{h}}^u$  l'unique loi invariante sur  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$  pour le processus  $(Z_t)$  associé aux taux de saut  $\lambda_{j,k}^u$ . Alors :*

$$\mu_{\mathbf{h}}^u \xrightarrow{u \rightarrow 0} \begin{cases} \delta_{(x_i, 0)} \otimes \delta_i & \text{si } \mathbf{h} = \mathbf{y}, \\ \delta_{(0, y_i)} \otimes \delta_i & \text{si } \mathbf{h} = \mathbf{x}, \end{cases}$$

*étroitement. En particulier :*

$$\Lambda_{\mathbf{y}}^u = \mu_{\mathbf{y}}^u(H_{\mathbf{y}}) \xrightarrow{u \rightarrow 0} H_{\mathbf{y}}(x_i, 0, i) < 0 \quad \text{et} \quad \Lambda_{\mathbf{x}}^u = \mu_{\mathbf{x}}^u(H_{\mathbf{x}}) \xrightarrow{u \rightarrow 0} H_{\mathbf{x}}(0, y_i, i) > 0.$$

**Démonstration.** Voir l'annexe B. ■

**Proposition 1.12** (Champ moyen). *Soient  $i, i' \in \mathcal{E}$  distincts et  $s \in ]0, 1[$ . Alors le champ moyen  $\bar{F} := sF^i + (1-s)F^{i'}$  possède un unique équilibre sur  $M_0^{\mathbf{y}}$  (resp.  $M_0^{\mathbf{x}}$ ), que l'on note  $(\bar{x}, 0)$  (resp.  $(0, \bar{y})$ ). Pour tout  $u > 0$ , si l'on se donne des taux de saut  $(\lambda_{j,k}^u)_{j,k \in \mathcal{E}, j \neq k}$  indépendants des tailles de populations, vérifiant :*

$$\lambda_{j,k}^u = \begin{cases} (1-s)u & \text{si } j = i \text{ et } k = i', \\ su & \text{si } j = i' \text{ et } k = i, \\ 1 & \text{si } j \in \mathcal{E} \text{ et } k \notin \{i, i'\}, \\ u^2 & \text{si } j \notin \{i, i'\} \text{ et } k \in \{i, i'\}, \end{cases}$$

*et que l'on note  $\mu_{\mathbf{y}}^u$  (resp.  $\mu_{\mathbf{x}}^u$ ) l'unique loi invariante sur  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}$  (resp.  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{x}}$ ) pour le processus  $(Z_t)$  associé aux taux de saut  $\lambda_{j,k}^u$ , alors pour tout  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ , on a pour la topologie étroite :*

$$\mu_{\mathbf{h}}^u \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} \begin{cases} \delta_{(\bar{x}, 0)} \otimes (s\delta_i + (1-s)\delta_{i'}) & \text{si } \mathbf{h} = \mathbf{y}, \\ \delta_{(0, \bar{y})} \otimes (s\delta_i + (1-s)\delta_{i'}) & \text{si } \mathbf{h} = \mathbf{x}. \end{cases}$$

**Démonstration.** Voir l'annexe B. ■

---

22. Il s'agit d'une liste exhaustive si l'on considère uniquement le cadre générique où  $\Lambda_{\mathbf{x}}, \Lambda_{\mathbf{y}} \neq 0$ .

## 2 Caractéristiques du processus et liens avec la chaîne squelette

### 2.1 Support de la loi des trajectoires

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $\mathbb{T}_n = \mathcal{E}^{n+1} \times \mathbb{R}_+^n$ . Un élément  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) = ((i_0, \dots, i_n), (u_1, \dots, u_n)) \in \mathbb{T}_n$  représente une suite d'environnements encodés dans  $\mathbf{i}$  se succédant avec des intervalles de temps encodés dans  $\mathbf{u}$ . On notera alors  $(p, \mathbf{i}, \mathbf{u}) \mapsto \Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p) = \Phi_{u_n}^{i_{n-1}} \circ \dots \circ \Phi_{u_1}^{i_0}(p)$  le flot composé. On pose également  $\mathbb{T} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{T}_n$ . Ceci va nous permettre d'encoder les chemins suivis par le processus  $(X_t, Y_t)$ .

**Définition 2.1.** Soit  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) = ((i_0, \dots, i_n), (u_1, \dots, u_n)) \in \mathbb{T}_n$  et  $p \in (\mathbb{R}_+)^2$ . Notons  $p_0 = p$ ,  $t_0 = 0$  et pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,  $t_k = u_1 + \dots + u_k$  et  $p_k = \Phi_{u_k}^{i_{k-1}} \circ \dots \circ \Phi_{u_1}^{i_0}(p)$ . Alors on définit  $\eta_{p, \mathbf{i}, \mathbf{u}}$  par :

$$\eta_{p, \mathbf{i}, \mathbf{u}}(t) = \begin{cases} p & \text{si } t = 0 \\ \Phi_{t-t_k}^{i_k}(p_k) & \text{si } t_k \leq t \leq t_{k+1} \text{ pour } 0 \leq k \leq n-1 \\ \Phi_{t-t_n}^{i_n} & \text{si } t \geq t_n \end{cases}$$

C'est la trajectoire obtenue en partant de  $p$  puis en suivant  $F^{i_0}$  pendant une durée  $u_1$ ,  $F^{i_1}$  pendant une durée  $u_2$ , etc.

On notera en outre

$$Q(p, \mathbf{i}, \mathbf{u}) = Q(p_1, i_0, i_1) \dots Q(p_n, i_{n-1}, i_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{T}_{n, ad(p)} = \{(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}_n : Q(p, \mathbf{i}, \mathbf{u}) > 0\},$$

dont les éléments seront dits "adaptés" à  $p$ . On ajoutera éventuellement  $i, j$  (resp.  $+$ ) en exposant pour indiquer qu'on impose  $i_0 = i$  et  $i_n = j$  (resp.  $u_1, \dots, u_n > 0$ )<sup>23</sup>.

La proposition qui suit énonce un résultat clef pour la compréhension du support de la loi des trajectoires  $(X_t, Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . La notation  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne dans l'ensemble du mémoire.

**Proposition 2.2.** Soit  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}_n$ . Alors pour tous  $(p, i) \in \mathbf{M}$ ,  $j \in \mathcal{E}$ , et  $T, \delta > 0$  :

$$\mathbb{P}_{p, i} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \|(X_t, Y_t) - \eta_{p, \mathbf{i}, \mathbf{u}}(t)\| \leq \delta, I_T = j \right] > 0.$$

**Démonstration.** On peut supposer  $t_n \leq T$  quitte à raccourcir  $(\mathbf{i}, \mathbf{u})$ , car cela ne modifie pas la trajectoire  $\eta_{p, \mathbf{i}, \mathbf{u}}$  sur  $[0, T]$ . Par irréductibilité de la matrice de transition  $Q(p, j, k)_{1 \leq j, k \leq d}$  pour tout  $p \in M$ , quitte à insérer des transitions environnementales instantanées<sup>24</sup>, on peut également supposer  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}_{ad(p)}^{i, j}$ . En remarquant que  $\eta_{p, \mathbf{i}, \mathbf{u}}(t) = \Phi_{t-t \wedge t_n}^{i_n} \circ \Phi_{t \wedge t_n - t \wedge t_{n-1}}^{i_{n-1}} \circ \dots \circ \Phi_{t \wedge t_1}^{i_0}(p)$ , on voit que  $(p, \mathbf{u}, t) \mapsto \eta_{p, \mathbf{i}, \mathbf{u}}(t)$  est une fonction continue. Par conséquent,  $(p, \mathbf{u}) \mapsto (\eta_{p, \mathbf{i}, \mathbf{u}})_{|[0, T]}$  est continue pour la topologie de la convergence uniforme<sup>25</sup>. La fonction  $(p, \mathbf{u}) \mapsto Q(p, \mathbf{i}, \mathbf{u})$  étant également continue, on obtient l'existence de  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tels que :

$$\forall \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \max_{1 \leq k \leq n} |v_k - u_k| \leq \delta_1 \Rightarrow \begin{cases} \sup_{0 \leq t \leq T} \|\eta_{p, \mathbf{i}, \mathbf{v}}(t) - \eta_{p, \mathbf{i}, \mathbf{u}}(t)\| \leq \delta, \\ Q(p, \mathbf{i}, \mathbf{v}) \geq \delta_2. \end{cases}$$

Si  $T_{n+1} > T$  alors  $I_T = \tilde{I}_n$  et la trajectoire suivie par  $(X_t, Y_t)_{0 \leq t \leq T}$  en partant de  $(p, i)$  est  $\eta_{p, \tilde{\mathbf{i}}, \mathbf{u}}$ , où

23. Par exemple :  $\mathbb{T}_n^{+, i, j} = \{(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}_n : i_0 = i, i_n = j, u_1, \dots, u_n > 0\}$ .

24. Insérer une transition instantanée par l'environnement  $j \in \mathcal{E}$  consiste à modifier  $(\mathbf{i}, \mathbf{u})$  en insérant  $j$  entre  $i_k$  et  $i_{k+1}$  dans  $\mathbf{i}$ , et 0 entre  $u_k$  et  $u_{k+1}$  dans  $\mathbf{u}$ , pour un certain  $k$ .

25. C'est une conséquence de la compacité de  $[0, T]$ .



$\tilde{\mathbf{I}} := (\tilde{I}_0, \dots, \tilde{I}_n)$  et  $\mathbf{U} := (U_1, \dots, U_n)$ , par conséquent :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_{p,i} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \|(X_t, Y_t) - \eta_{p,\mathbf{i},\mathbf{u}}(t)\| \leq \delta, I_T = j \right] \\
& \geq \mathbb{P}_{p,i} \left[ \max_{1 \leq k \leq n} |U_k - u_k| \leq \delta_1, U_{n+1} > T - t_n + n\delta_1, (\tilde{I}_0, \dots, \tilde{I}_n) = \mathbf{i} \right] \\
& = \mathbb{E}_{p,i} \left[ \mathbf{1}_{\{\max_{1 \leq k \leq n} |U_k - u_k| \leq \delta_1, U_{n+1} > T - t_n + n\delta_1\}} Q(p, \mathbf{i}, \mathbf{U}) \right] \\
& \geq \delta_2 \mathbb{P}_{p,i} \left[ \max_{1 \leq k \leq n} |U_k - u_k| \leq \delta_1, U_{n+1} > T - t_n + n\delta_1 \right] \\
& \geq \delta_2 \left[ \prod_{k=1}^n (e^{-\lambda u_k} - e^{-\lambda(u_k + \delta_1)}) \right] e^{-\lambda(T - t_n + n\delta_1)} \\
& > 0.
\end{aligned}$$

■

Pour tout  $p \in M$ , notons  $\text{Conv}(F)(p)$  l'enveloppe convexe des  $\{F^i(p), i \in \mathcal{E}\}$ . Nous désignerons par  $\mathcal{S}_p$  l'ensemble des fonctions  $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow M$  solutions de l'inclusion différentielle

$$\dot{\eta}(t) \in \text{Conv}(F)(\eta(t)), \quad (\text{ID})$$

d'origine  $\eta(0) = p$ . Nous entendons par "solution" toute fonction absolument continue<sup>26</sup> vérifiant (ID) pour presque tout  $t$ .

Bien évidemment  $\mathcal{S}_p$  contient l'ensemble  $\mathcal{S}'_p := \{\eta_{p,\mathbf{i},\mathbf{u}}, (\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}\}$ . En fait nous allons voir qu'il en constitue l'adhérence dans l'espace  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, M)$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Pour le comprendre nous avons besoin d'introduire également  $\mathcal{S}''_p$ , défini comme l'ensemble des fonctions  $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow M$  qui sont solutions<sup>27</sup> d'une équation différentielle

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{i \in \mathcal{E}} \gamma_i(t) F^i(\eta(t)), \quad (\text{ED})$$

d'origine  $\eta(0) = p$ , pour un certain jeu de fonctions  $\gamma_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  mesurables et de somme 1. De façon claire, nous avons les inclusions  $\mathcal{S}'_p \subseteq \mathcal{S}''_p \subseteq \mathcal{S}_p$ . L'équation (ED) est de la forme  $\dot{\eta} = G(t, \eta)$  où  $G$  est une fonction mesurable en  $t$ , continue en  $\eta$ , localement bornée et localement lipschitzienne en  $\eta$  : cela implique l'existence et l'unicité de la solution maximale (voir par exemple [Hal80, §I.5]). L'invariance positive de  $M$  par les champs ainsi que sa compacité impliquent alors que pour toute condition initiale dans  $M$ , l'intervalle maximal est égal à  $\mathbb{R}_+$ .

**Proposition 2.3.** *Pour tout  $p \in M$ , on a  $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}''_p$ . Cet ensemble est non vide, compact, connexe par arcs, et c'est l'adhérence de  $\mathcal{S}'_p$ .*

**Démonstration.** Ce résultat correspond pour essentiellement au lemme 3.3 de [BBMZ15] ainsi qu'aux arguments utilisés dans la preuve du théorème 3.4 de ce même article. Cependant, il renvoie à des résultats généraux de la théorie des inclusions différentielles. Nous avons préféré créer une démonstration sur mesure pour ce mémoire : rendez-vous en annexe B pour découvrir cette preuve technique! ■

**Théorème 2.4.** *Si  $(X_0, Y_0) = p \in M$  alors la loi de la trajectoire  $(X_t, Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  a pour support  $\mathcal{S}_p$ .*

**Démonstration.** Toute trajectoire est dans  $\mathcal{S}'_p$ , d'où l'inclusion du support dans  $\mathcal{S}_p = \overline{\mathcal{S}'_p}$ . Réciproquement la proposition 2.2 montre que le support contient  $\mathcal{S}'_p$ , donc son adhérence  $\mathcal{S}_p$ . ■

<sup>26.</sup> Donc dérivable presque partout.

<sup>27.</sup> De façon analogue au cas de (ID), il s'agit des fonctions absolument continues vérifiant (ED) presque partout.

## 2.2 Accessibilité

Une notion fondamentale dans l'étude des trajectoires de  $(X_t, Y_t)$  est celle d'accessibilité, typiquement d'un point à partir d'un autre. Ceci nécessite dans un premier temps de définir l'accessibilité d'un ouvert à partir d'un point, et nous montrons que diverses formulations de cette notion sont équivalentes.

**Définition-Proposition 2.5.** *Soient  $p$  un point et  $\mathcal{V}$  un ouvert de  $M$ . On dit que  $\mathcal{V}$  est **accessible depuis  $p$**  si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

- (i) *Il existe  $i, j \in \mathcal{E}$  et  $t \in \mathbb{R}_+$  tels que  $\mathbb{P}_{p,i}[Z_t \in \mathcal{V} \times \{j\}] > 0$  ;*
- (i') *Pour tous  $i, j \in \mathcal{E}$ , il existe  $t \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\mathbb{P}_{p,i}[Z_t \in \mathcal{V} \times \{j\}] > 0$  ;*
- (ii) *Il existe  $i, j \in \mathcal{E}$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $\mathbb{P}_{p,i}[\tilde{Z}_n \in \mathcal{V} \times \{j\}] > 0$  ;*
- (ii') *Pour tous  $i, j \in \mathcal{E}$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbb{P}_{p,i}[\tilde{Z}_n \in \mathcal{V} \times \{j\}] > 0$  ;*
- (iii) *Il existe  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}$  tel que  $\Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p) \in \mathcal{V}$  ;*
- (iv) *Il existe  $\eta \in \mathcal{S}_p$  et  $s \in \mathbb{R}_+$  tels que  $\eta(s) \in \mathcal{V}$ .*

*Remarque.* Les quatre premiers points se reformulent au moyen de la notion classique d'accessibilité pour les chaînes ou les processus de Markov (voir la section A.1). Par exemple, le point (ii) signifie qu'il existe  $i, j \in \mathcal{E}$  tels que  $\mathcal{V} \times \{j\}$  soit accessible à partir de  $(p, i)$  pour la chaîne  $(\tilde{Z}_n)$ .

**Démonstration.** Bien entendu (i')  $\Rightarrow$  (i) et (ii')  $\Rightarrow$  (ii). De plus, (iii)  $\Rightarrow$  (iv) car pour tout  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}_n$ , on a  $\Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p) = \eta_{p,\mathbf{i},\mathbf{u}}(t_n)$ . Ensuite, (i)  $\Rightarrow$  (iii) et (ii)  $\Rightarrow$  (iii) car quel que soit  $t \in \mathbb{R}_+$  ou  $n \in \mathbb{N}$ , toute réalisation de  $(X_t, Y_t)$  ou  $(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n)$  avec  $(X_0, Y_0) = p$  est de la forme  $\Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p)$  avec  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}$ .

Enfin, supposons (iv). Par densité de  $\mathcal{S}'_p$  dans  $\mathcal{S}_p$  (proposition 2.3), il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}_n$  tels que  $q := \eta_{p,\mathbf{i},\mathbf{u}}(s) \in \mathcal{V}$ . La proposition 2.2 implique alors le point (i'). Fixons  $i, j \in \mathcal{E}$  : quitte à modifier  $(\mathbf{i}, \mathbf{u})$  sans changer la trajectoire  $\eta_{p,\mathbf{i},\mathbf{u}}$  sur  $[0, s]$ , on peut supposer  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}_{ad(p)}^{i,j}$ , et  $t_n = s$ . Il existe  $\delta_1 > 0$  et  $\delta_2 > 0$  tels que :

$$\forall \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \max_{1 \leq k \leq n} |v_k - u_k| \leq \delta_1 \Rightarrow \begin{cases} \Phi_{\mathbf{v}}^{\mathbf{i}}(p) \in \mathcal{V}, \\ Q(p, \mathbf{i}, \mathbf{v}) \geq \delta_2. \end{cases}$$

On a alors, en notant  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p,i}[\tilde{Z}_n \in \mathcal{V} \times \{j\}] &\geq \mathbb{P}_{p,i} \left[ \max_{1 \leq k \leq n} |U_k - u_k| \leq \delta_1, (\tilde{I}_0, \dots, \tilde{I}_n) = \mathbf{i} \right] \\ &= \mathbb{E}_{p,i} [\mathbf{1}_{\{\max_{1 \leq k \leq n} |U_k - u_k| \leq \delta_1\}} Q(p, \mathbf{i}, \mathbf{U})] \\ &\geq \delta_2 \mathbb{P}_{p,i} \left[ \max_{1 \leq k \leq n} |U_k - u_k| \leq \delta_1 \right] \\ &> 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve (ii'). ■

**Définition 2.6.** *Soient  $p, q \in M$ . On dit que  $q$  est accessible à partir de  $p$  si tous les voisinages ouverts de  $q$  dans  $M$  le sont. On note  $\text{Acc}(p)$ , l'ensemble des points accessibles à partir de  $p$ , à savoir :*

$$\text{Acc}(p) = \overline{\{\eta(t), \eta \in \mathcal{S}_p, t \in \mathbb{R}_+\}}.$$

**Proposition 2.7.** Soient  $p, q, r \in M$ . Si  $q \in \text{Acc}(p)$  et  $r \in \text{Acc}(q)$ , alors  $r \in \text{Acc}(p)$ .

**Démonstration.** Soit  $\mathcal{V}_r$  un ouvert contenant  $r$ . Comme  $r \in \text{Acc}(q)$ , il existe  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}$  tel que  $\Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(q) \in \mathcal{V}_r$ . Par continuité de  $q' \mapsto \Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(q')$ , il existe un ouvert  $\mathcal{V}_q$  contenant  $q$  tel que :

$$\forall q' \in \mathcal{V}_q, \quad \Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(q') \in \mathcal{V}_r.$$

Comme  $q \in \text{Acc}(p)$ , il existe  $(\mathbf{i}', \mathbf{u}') \in \mathbb{T}$  tel que  $\Phi_{\mathbf{u}'}^{\mathbf{i}'}(p) \in \mathcal{V}_q$ . Alors  $\Phi_{(\mathbf{u}', \mathbf{u})}^{(\mathbf{i}', \mathbf{i})}(p) \in \mathcal{V}_r$ , d'où  $r \in \text{Acc}(p)$ . ■

**Définition 2.8.** On dira qu'un point  $p \in M$  est **accessible** s'il est accessible à partir de tous les points  $q \in M \setminus M_0$ . L'ensemble des points accessibles sera noté  $\Gamma$ .

Remarque. La proposition 2.7 implique que  $\Gamma$  est soit vide, soit égal à  $\text{Acc}(p)$  pour  $p \in \Gamma$  quelconque.

**Proposition 2.9.** Pour tout  $p \in M$ ,  $\text{Acc}(p)$  est compact et positivement invariant par tous les flots  $\Phi^i$ ,  $i \in \mathcal{E}$ . En particulier c'est le cas pour  $\Gamma$ .

**Démonstration.** Par définition,  $\text{Acc}(p)$  est un fermé de  $M$ . La proposition 2.7 montre le reste. ■

**Proposition 2.10.** Le segment  $[x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\}$  est inclus dans  $\Gamma$ . Quant au segment  $\{0\} \times [y_{\min}, y_{\max}]$ , il est inclus dans  $\text{Acc}(p)$  pour tout  $p \in M_0^{\mathbf{x}}$ . De plus on a soit  $\Gamma \cap M_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$ , soit  $\{0\} \times [y_{\min}, y_{\max}] \subseteq \Gamma$ .

**Démonstration.** Pour tout  $p \in M \setminus M_0$ ,  $\Phi_t^{i_{\min}}(p)$  converge vers  $(x_{\min}, 0)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , et donc  $(x_{\min}, 0) \in \Gamma$ . L'invariance de  $\Gamma$  par le flot  $\Phi^{i_{\max}}$  entraîne alors que  $[x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\} \subseteq \Gamma$ .

Pour tout  $p \in M_0^{\mathbf{x}}$ ,  $\Phi_t^{j_{\min}}(p)$  converge vers  $(0, y_{\min})$  quand  $t \rightarrow +\infty$  donc  $(0, y_{\min}) \in \text{Acc}(p)$ . L'invariance de l'ensemble  $\text{Acc}(p)$  par  $\Phi^{j_{\max}}$  implique qu'il contient  $\{0\} \times [y_{\min}, y_{\max}]$ . Par conséquent si  $\Gamma \cap M_0^{\mathbf{x}} \neq \emptyset$ , la transitivité de la relation d'accessibilité entraîne que  $\{0\} \times [y_{\min}, y_{\max}] \subseteq \Gamma$ . ■

## 2.3 Lois invariantes

Soient  $D \in \{M, M_{\mathbf{x}}^0, M_{\mathbf{y}}^0, M \setminus M_0\}$ , et  $\mathbf{D} = D \times \mathcal{E}$ . Dans la suite on notera  $\tilde{\mathcal{L}}$  (resp.  $\mathcal{L}$ ) l'ensemble (aléatoire) des valeurs d'adhérence de  $(\tilde{\Pi}_n)$  (resp.  $(\Pi_t)$ ) pour la topologie étroite dans  $\mathcal{P}_1(\mathbf{M})$ . Le résultat suivant est d'importance cruciale.

**Proposition 2.11.** L'ensemble  $\tilde{\mathcal{L}}$  est toujours non vide, et est presque sûrement inclus dans  $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{inv}}(\mathbf{M})$ . De plus, si  $D$  est compact et  $\tilde{Z}_0 = z_0 \in \mathbf{D}$ , alors avec probabilité 1,  $\tilde{\mathcal{L}}$  est inclus dans  $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{inv}}(\mathbf{D})$ . Dans ce cas  $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{inv}}(\mathbf{D})$  est compact pour la topologie étroite et non vide.

**Démonstration.** L'espace  $\mathcal{P}_1(\mathbf{M})$  muni de la topologie étroite est compact car  $\mathbf{M}$  l'est : on peut le voir comme une conséquence du théorème de Prohorov. Par conséquent  $\tilde{\mathcal{L}}$  est toujours non vide.

Soit  $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue quelconque. Pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\tilde{\Pi}_n \tilde{P}f - \tilde{\Pi}_n f = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n \tilde{P}f(\tilde{Z}_k) - f(\tilde{Z}_{k+1}) \right) + \frac{1}{n} (f(\tilde{Z}_{n+1}) - f(\tilde{Z}_1)).$$

Posons  $\mathcal{G}_k = \sigma(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_{k+1})$  et  $M_k = \sum_{j=1}^k (\tilde{P}f(\tilde{Z}_j) - f(\tilde{Z}_{j+1}))$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . Le processus  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est une  $(\mathcal{G}_k)$ -martingale, dont les incréments sont bornés par  $2\|f\|_{\infty}$ . D'après la loi forte des grands nombres pour les martingales (voir l'annexe D),  $M_n/n$  converge presque sûrement vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . Cela implique qu'avec probabilité 1,  $\tilde{\Pi}_n \tilde{P}f - \tilde{\Pi}_n f \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Comme  $\mathbf{M}$  est un

compact métrisable, il existe une famille dénombrable  $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$  dense dans  $\mathcal{C}(\mathbf{M})$ <sup>28</sup>. La convergence précédente ayant lieu pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}(\mathbf{M})$ , on a presque sûrement : pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{\Pi}_n \tilde{P}f_p - \tilde{\Pi}_n f_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . La densité des  $f_p$  implique alors :

$$\left( \forall f \in \mathcal{C}(\mathbf{M}), \quad \tilde{\Pi}_n \tilde{P}f - \tilde{\Pi}_n f \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right) \quad \text{p.s.} \quad (8)$$

Sur cet événement presque sûr, si  $(\tilde{\Pi}_{\phi(n)})$  est une suite extraite de  $(\tilde{\Pi}_n)$  convergeant étroitement vers  $\nu \in \mathcal{P}_1(\mathbf{M})$ , alors pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}(\mathbf{M})$ , d'une part  $\tilde{\Pi}_n \tilde{P}f \rightarrow \nu \tilde{P}f$ , car  $\tilde{P}$  est fellerien, et d'autre part  $\tilde{\Pi}_n \rightarrow \nu f$  en raison de (8). D'où  $\nu \tilde{P}f = \nu f$ , et ceci pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}(\mathbf{M})$ , donc  $\nu$  est invariante par  $\tilde{P}$ .

Si  $D$  est compact et  $\tilde{Z}_0 = z_0 \in \mathbf{D}$ , alors  $(\tilde{\Pi}_n)$  est à valeurs dans  $\mathcal{P}_1(\mathbf{D})$ . Cet espace est fermé dans  $\mathcal{P}_1(\mathbf{M})$  pour la topologie étroite, en raison du théorème de Portmanteau. Par conséquent on a presque sûrement  $\tilde{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{P}_1(\mathbf{D}) \cap \tilde{\mathcal{P}}_{inv}(\mathbf{M}) = \tilde{\mathcal{P}}_{inv}(\mathbf{D})$ . Cet espace est donc non vide, et c'est une intersection de fermés du compact  $\mathcal{P}_1(\mathbf{M})$ . En effet, comme  $\tilde{P}$  est fellerien, l'application  $\nu \mapsto \nu \tilde{P}$  est continue pour la topologie étroite sur  $\mathcal{P}_1(\mathbf{M})$ . ■

**Proposition 2.12.** *L'application  $\nu \mapsto \nu \tilde{K}$  réalise un homéomorphisme de  $\tilde{\mathcal{P}}_{inv}(\mathbf{D})$  vers  $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{D})$ , et  $\nu \mapsto \nu Q$  est son homéomorphisme réciproque. En outre ces homéomorphismes ne changent pas le support des mesures.*

**Démonstration.** Voir [BBMZ15, Proposition 2.4, Lemma 2.5]. ■

**Corollaire 2.13.** *Il est équivalent de prouver l'unicité (ou l'existence) d'une mesure invariante pour la chaîne  $(\tilde{Z}_n)$  et pour le processus  $(Z_t)$  sur  $\mathbf{D}$ . Si  $\mathbf{D}$  est compact alors  $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{D})$  est un compact non vide.*

On peut également établir une correspondance asymptotique entre les mesures empiriques  $\Pi_t$  et  $\tilde{\Pi}_n$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , notons  $N_t = \sup\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\}$ <sup>29</sup>.

**Proposition 2.14.** *Presque sûrement, pour la topologie étroite :*

$$\Pi_t - \tilde{\Pi}_{N_t} \tilde{K} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \Pi_{T_n} - \tilde{\Pi}_n \tilde{K} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

**Démonstration.** Voir [BBMZ15, Lemme 2.5], appliqué à une suite dense dans  $\mathcal{C}(\mathbf{M})$ . ■

**Corollaire 2.15.** *L'ensemble  $\mathcal{L}$  est toujours non vide, et est presque sûrement inclus dans  $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M})$ . De plus, si  $D$  est compact et  $Z_0 = z_0 \in \mathbf{D}$ , alors avec probabilité 1,  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}_{inv}(\mathbf{D})$ .*

**Démonstration.** Choisissons  $\omega \in \Omega'$ , où  $\Omega'$  est un événement de probabilité 1 sur lequel :

- $\tilde{\mathcal{L}} \subseteq \tilde{\mathcal{P}}_{inv}(\mathbf{M})$  ;
- les convergences de la proposition précédente ont lieu.

Soit  $\Pi \in \mathcal{L}(\omega)$  : il existe  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{R}_+^*$  tendant vers  $+\infty$  telle que  $\Pi_{t_k}(\omega) \rightarrow \Pi$  étroitement, quand  $k \rightarrow +\infty$ . D'après la proposition précédente,  $\tilde{\Pi}_{N_{t_k}(\omega)}(\omega) \rightarrow \Pi$ , donc  $\tilde{\Pi}_{N_{t_k}(\omega)}(\omega) \rightarrow \Pi Q$ . Etant donné que  $N_{t_k}(\omega) \rightarrow +\infty$  quand  $k \rightarrow +\infty$ <sup>30</sup>, la mesure  $\Pi Q$  est une valeur d'adhérence de

28. Il est facile de voir dans notre cas qu'on peut par exemple plonger  $\mathbf{M}$  dans  $\mathbb{R}^2$  et prendre les fonctions polynomiales à coefficients rationnels, dénombrables et denses dans  $\mathcal{C}(\mathbf{M})$  d'après le théorème de Stone-Weierstrass.

29. Il s'agit d'un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ .

30. On rappelle que dans la construction du processus on a supposé  $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n = +\infty$  sur  $\Omega$ , quitte à le remplacer par un sous-ensemble de probabilité 1.

$(\tilde{\Pi}_n)$  donc un élément de  $\tilde{\mathcal{P}}_{inv}(\mathbf{M})$ . Par conséquent  $\Pi \in \mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M})$ . Enfin si  $Z_0(\omega) \in \mathbf{D}$  avec  $D$  compact, alors  $(\Pi_t(\omega))_{t>0}$  est à valeurs dans le compact  $\mathcal{P}_1(\mathbf{D})$ , et donc  $\Pi \in \mathcal{P}_{inv}(\mathbf{D})$ . ■

Les propositions qui suivent seront utiles lorsque l'on s'intéressera à la continuité absolue des mesures invariantes par rapport à  $\ell_{\mathbf{D}}$ .

**Proposition 2.16.** *Les noyaux  $\tilde{K}$  et  $Q$  préservent l'absolue continuité par rapport à  $\ell_{\mathbf{D}}$  des mesures positives finies.*

**Démonstration.** Soient  $\alpha$  une mesure positive finie sur  $\mathbf{D}$ , de densité  $f$  par rapport à  $\ell_{\mathbf{D}}$ , et  $B$  un borélien de  $\mathbf{D}$ . On a, en utilisant les théorèmes de Fubini et de changement de variable géométrique :

$$\begin{aligned} \alpha \tilde{K}(B) &= \int_{z \in \mathbf{D}} f(z) \tilde{K}(z, B) \ell_{\mathbf{D}}(dz) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{E}} \int_{p \in D} f(p, i) \tilde{K}(p, i, B) \ell_D(dp) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{E}} \int_{p \in D} \int_{t \in \mathbb{R}_+} f(p, i) \lambda e^{-\lambda t} \mathbf{1}_B(\Phi_t^i(p), i) dt \ell_D(dp) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{E}} \int_{t \in \mathbb{R}_+} \lambda e^{-\lambda t} \int_{p \in D} f(\Phi_{-t}^i(q), i) \mathbf{1}_B(q, i) |\det(D\Phi_{-t}^i(q))| \ell_D(dq) dt \end{aligned}$$

où l'on a noté  $D\Phi_{-t}^i$  la différentielle de  $\Phi_{-t}^i$ , restreinte à l'axe des abscisses ou des ordonnées dans le cas où  $D \in \{M_0^x, M_0^y\}$ . En utilisant une nouvelle fois le théorème de Fubini on obtient une égalité de la forme :

$$\alpha \tilde{K}(B) = \sum_{i \in \mathcal{E}} \int_{q \in D} g(q, i) \mathbf{1}_B(q, i) \ell_D(dq),$$

où  $g$  est une fonction réelle mesurable positive. Cette fonction est la densité de  $\alpha \tilde{K}$  par rapport à  $\ell_{\mathbf{D}}$ . Enfin, on a :

$$\begin{aligned} \alpha Q(B) &= \sum_{i \in \mathcal{E}} \int_{p \in D} f(p, i) Q(p, i, B) \ell_D(dp) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{E}} \int_{p \in D} f(p, i) \sum_{j \in \mathcal{E}} Q(p, i, j) \mathbf{1}_B(p, j) \ell_D(dp) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{E}} \int_{p \in D} \left( \sum_{i \in \mathcal{E}} f(p, i) Q(p, i, j) \right) \mathbf{1}_B(p, j) \ell_D(dp), \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\alpha Q$  a aussi une densité par rapport à  $\ell_{\mathbf{D}}$ . ■

Nous pouvons en tirer la conséquence importante suivante.

**Proposition 2.17.** *Soit  $\nu \in \mathcal{P}_{inv}(\mathbf{D})$  (resp.  $\tilde{\mathcal{P}}_{inv}(\mathbf{D})$ ), et notons  $\nu_{ac}$  et  $\nu_{sing}$  les parties absolument continue et singulière de  $\nu$  par rapport à  $\ell_{\mathbf{D}}$ . Alors  $\nu_{ac}$  et  $\nu_{sing}$  sont aussi des mesures invariantes par  $(P_t)$  (resp  $\tilde{P}$ ). En particulier, si il y a unicité de la loi invariante pour le processus  $(Z_t)$  (resp. la chaîne  $(\tilde{Z}_n)$ ) sur  $\mathbf{D}$ , alors  $\nu$  est soit absolument continue, soit singulière par rapport à  $\ell_{\mathbf{D}}$ .*

**Démonstration.** Soit  $\nu \in \tilde{\mathcal{P}}_{inv}(\mathbf{D})$ , et  $\nu_{ac}, \nu_{sing}$  comme dans l'énoncé de la proposition. En appliquant le noyau  $\tilde{P}$  à la décomposition, on obtient  $\nu = \nu_{ac} \tilde{P} + \nu_{sing} \tilde{P}$ . Or, d'après la proposition 2.16, la mesure  $\nu_{ac} \tilde{P} = \nu_{ac} \tilde{K} Q$  est absolument continue par rapport à  $\ell_{\mathbf{D}}$ . L'unicité de la décomposition de Radon-Nikodym implique alors que  $\nu_{ac} \geq \nu_{ac} \tilde{P}$ . Il y a donc égalité car les mesures sont positives de même

masse totale<sup>31</sup>. Ceci entraîne  $\nu_{sing}\tilde{P} = \nu - \nu_{ac} = \nu_{sing}$ . S'il y a unicité de la loi invariante pour la chaîne  $(\tilde{Z}_n)$  sur  $\mathbf{D}$ , alors nécessairement  $\nu_{ac}(\mathbf{D}) = 0$  ou  $\nu_{sing}(\mathbf{D}) = 0$ , sinon les mesures  $\nu_{ac}/\nu_{ac}(\mathbf{D})$  et  $\nu_{sing}/\nu_{sing}(\mathbf{D})$  constitueraient deux lois invariantes distinctes.

Enfin, en utilisant les homéomorphismes donnés dans la proposition 2.12, on montre la même chose pour  $\nu \in \mathcal{P}_{inv}(\mathbf{D})$ . ■

### 3 Dynamiques en temps long

Cette partie constitue le cœur du mémoire. C'est pourquoi nous avons choisi de lui donner cette position centrale, en reportant une partie du contenu théorique sur lequel elle s'appuie dans l'annexe A. Il s'agit ici de démontrer le théorème 3.1 ainsi que les résultats relatifs aux cinq cas de figure présentés dans la section 1.3.

#### 3.1 Cas d'une seule espèce

L'examen du comportement du processus  $(Z_t)$  sur les ensembles d'extinction est un préliminaire indispensable à une analyse plus générale.

**Théorème 3.1.** *Pour tout  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ , il existe une unique loi  $\mu_{\mathbf{h}} \in \mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M}_0^{\mathbf{h}})$ . De plus :*

1. *La mesure  $\mu_{\mathbf{h}}$  est absolument continue<sup>32</sup> par rapport à  $\ell_{\mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}}$ .*
2. *Le support de  $\mu_{\mathbf{h}}$  est  $[x_{min}, x_{max}] \times \{0\} \times \mathcal{E}$  si  $\mathbf{h} = \mathbf{y}$ , et  $\{0\} \times [y_{min}, y_{max}] \times \mathcal{E}$  si  $\mathbf{h} = \mathbf{x}$ .*
3. *Si  $Z_0 = z_0 \in \mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$ , alors presque sûrement :*
  - (a)  $\Pi_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \mu_{\mathbf{h}}$  *étroitement ;*
  - (b) *si  $\mathbf{h} = \mathbf{y}$  (resp.  $\mathbf{x}$ ), l'ensemble  $\omega$ -limite de  $(X_t)$  (resp.  $(Y_t)$ ) est  $[x_{min}, x_{max}]$  (resp.  $[y_{min}, y_{max}]$ ).*
4. *Il existe  $C, \alpha > 0$  tels que :*

$$\forall z \in \mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|\mathbb{P}_z(Z_t \in \cdot) - \mu_{\mathbf{h}}\|_{VT} \leq Ce^{-\alpha t}.$$

**Démonstration.** On restreint au cas où  $\mathbf{h} = \mathbf{y}$ , l'autre étant similaire. Soit  $p \in [x_{min}, x_{max}] \times \{0\}$ . Si  $i_{min}$  et  $i_{max}$  sont les environnements associés aux points d'équilibre  $(x_{min}, 0)$  et  $(x_{max}, 0)$  alors  $F_x^{i_{min}}(p)$  et  $F_x^{i_{max}}(p)$  sont de signes distincts, ce qui entraîne le critère d'Hörmander fort (voir définition A.18) en ce point. De plus,  $p$  est accessible depuis tout point de  $M_0^{\mathbf{y}}$  (proposition 2.10). On peut alors appliquer le théorème A.20 avec  $D = M_0^{\mathbf{y}}$ , affirmant qu'il existe au plus une loi dans  $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}})$ , et que si existence il y a, cette loi est absolument continue par rapport à  $\ell_{\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}}$ . Le corollaire 2.13 implique qu'elle existe bel et bien : notons-là  $\mu_{\mathbf{y}}$ .

Si  $Z_0 = z_0 \in \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}$ , le corollaire 2.15 entraîne alors qu'avec probabilité 1,  $(\Pi_t)_{t>0}$ , à valeurs dans le compact  $\mathcal{P}_1(\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}})$ , a pour unique valeur d'adhérence  $\mu_{\mathbf{y}}$ , d'où la convergence énoncée dans 3(a).

D'après la proposition 2.12, il existe aussi une unique mesure  $\tilde{\mu}_{\mathbf{y}}$  invariante sur  $M_0^{\mathbf{y}}$ , dont le support est identique à celui de  $\mu_{\mathbf{y}}$ . Or l'accessibilité de  $p$  depuis tout  $M_0^{\mathbf{y}}$  implique celle de  $\mathcal{O} \times \{i\}$ , pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  contenant  $p$  et  $i \in \mathcal{E}$ , du point de vue de la chaîne  $(\tilde{Z}_n)$  restreinte à  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}$ . La proposition A.3 implique alors  $\tilde{\mu}_{\mathbf{h}}(\mathcal{O} \times \{i\}) > 0$ . Cela prouve que l'on a :

$$[x_{min}, x_{max}] \times \{0\} \times \mathcal{E} \subseteq \text{supp}(\tilde{\mu}_{\mathbf{h}}) = \text{supp}(\mu_{\mathbf{h}}).$$

31. Il suffit, pour chaque ensemble mesurable, de lui appliquer l'inégalité obtenue en même temps qu'à son complémentaire.

32. Dans le cas de deux environnements de type Lotka-Volterra, sa densité est explicitement calculable, voir [BL16].

Pour l'inclusion réciproque, on peut remarquer que, partant d'une condition initiale  $z_0$  dans  $[x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\} \times \mathcal{E}$ , le processus  $(Z_t)$  y reste, et par conséquent le point 3(a), associé au théorème de Portmanteau, montre que  $\mu_{\mathbf{y}}([x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\} \times \mathcal{E}) = 1$ . Le point 2 est donc prouvé.

Passons au point 3(b). Pour tout point de départ  $z_0 \in \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}$ , on a presque sûrement :

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \Pi_t([x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\} \times \mathcal{E}) \geq \mu_{\mathbf{y}}([x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\} \times \mathcal{E}) > 0.$$

Sur cet événement de probabilité 1,  $(X_t)$  pénètre dans le segment  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , puis y reste nécessairement, donc l'ensemble  $\omega$ -limite de  $(X_t)$  est inclus dans  $[x_{\min}, x_{\max}]$ . Réciproquement, pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}$  intersectant  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , on a presque sûrement :

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \Pi_t(\mathcal{O} \times \{0\} \times \mathcal{E}) \geq \mu_{\mathbf{y}}(\mathcal{O} \times \{0\} \times \mathcal{E}) > 0.$$

Ceci entraîne, pour chaque  $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ , la récurrence de tous les voisinages de  $x$  pour la trajectoire  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Autrement dit  $[x_{\min}, x_{\max}]$  est inclus dans l'ensemble  $\omega$ -limite de  $(X_t)$  avec probabilité 1.

Enfin, occupons-nous de 4. On peut appliquer la proposition A.21 avec  $\mathcal{K} = \mathcal{D} = M_0^{\mathbf{y}}$ . En modifiant légèrement les notations, on obtient  $t_0, r_0 > 0$  et une mesure positive non nulle  $\nu_0$  sur  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}$  tels que la condition de Doeblin suivante soit vérifiée :

$$\forall z \in \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}, \forall t \in [t_0, t_0 + r_0], \quad P_t(z, \cdot) \geq \nu_0(\cdot). \quad (9)$$

Notons  $\varepsilon_0 = \nu_0(\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}) \in ]0, 1]$ . Soit  $s \in [t_0, t_0 + r_0]$  quelconque. Par un raisonnement classique, nous allons voir que (9) entraîne le caractère contractant de  $P_s$  sur  $\mathcal{P}_1(\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}})$ . En effet, le noyau  $N$  défini sur  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}$  par  $N(z, \cdot) = P(z, \cdot) - \nu_0(\cdot)$  est positif, et vérifie  $N(z, \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}) = 1 - \varepsilon_0 < 1$  pour tout  $z \in \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}$ . Pour toutes lois  $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{P}_1(\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}})$ , on a donc :

$$\|\nu_1 P_s - \nu_2 P_s\|_{VT} = \|\nu_1 N - \nu_2 N\|_{VT} \leq (1 - \varepsilon_0) \|\nu_1 - \nu_2\|_{VT}. \quad (10)$$

Notons  $m = \lceil t_0/r_0 \rceil$  et soit  $t \geq mt_0$ . Alors la division euclidienne de  $t$  par  $t_0$  nous fournit  $n \geq m$  et  $0 \leq r < t_0$  tels que  $t = nt_0 + r$ . On a  $r' := r/m \leq r_0$ , et  $t = (n - m)t_0 + m(t_0 + r')$ , d'où  $P_t = (P_{t_0})^{n-m} (P_{t_0+r'})^m$ . En utilisant 10, on a donc pour tout  $z \in \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}$  :

$$\|P_t(z, \cdot) - \mu_{\mathbf{y}}\|_{VT} = \|\delta_z P_t - \mu_{\mathbf{y}} P_t\|_{VT} \leq (1 - \varepsilon_0)^n \|\delta_z - \mu_{\mathbf{y}}\|_{VT} \leq 2(1 - \varepsilon_0)^n.$$

En remarquant que  $n \geq t/t_0 - 1$ , et en notant  $\alpha = -\log(1 - \varepsilon_0)/t_0 > 0$ ,  $C = 2/(1 - \varepsilon_0)$ , on obtient :

$$\forall t \geq mt_0, \quad \|P_t(z, \cdot) - \mu_{\mathbf{y}}\|_{VT} \leq C e^{-\alpha t}.$$

Quitte à effectuer  $C \leftarrow C \vee 2e^{\lambda m t_0}$ , l'inégalité précédente tient pour tout  $t \geq 0$ . ■

## 3.2 Inégalités de dérive

Dans la suite, nous noterons, pour tout intervalle <sup>33</sup>  $J \subseteq \mathbb{R}_+$  :

$$M_J^{\mathbf{x}} = \{(x, y) \in M : x \in J\} \quad \text{et} \quad M_J^{\mathbf{y}} = \{(x, y) \in M : y \in J\},$$

33. Nous utiliserons pour cette occasion (et uniquement celle-ci) les notations anglo-saxonnes, à savoir des parenthèses pour les extrémités ouvertes, afin d'augmenter la lisibilité en indice.

ainsi que  $\mathbf{M}_J^{\mathbf{x}} = M_J^{\mathbf{x}} \times \mathcal{E}$  et  $\mathbf{M}_J^{\mathbf{y}} = M_J^{\mathbf{y}} \times \mathcal{E}$ . De plus, nous supposons  $\Lambda_{\mathbf{x}}, \Lambda_{\mathbf{y}} \neq 0$ , et noterons :

$$\begin{aligned} V^{\mathbf{x}} : \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} &\rightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & V^{\mathbf{y}} : \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, i) &\mapsto -\text{sgn}(\Lambda_{\mathbf{x}}) \log(x) & & & (x, y, i) &\mapsto -\text{sgn}(\Lambda_{\mathbf{y}}) \log(y). \end{aligned}$$

Ces fonctions vont nous permettre d'exprimer des inégalités de dérive du processus au voisinage des frontières d'extinction, quantifiant le fait intuitif que  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$  est localement attractive ou répulsive selon que  $\Lambda_{\mathbf{h}} < 0$  ou  $\Lambda_{\mathbf{h}} > 0$ .

**Proposition 3.2.** *Soient  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ , et  $0 < \alpha_{\mathbf{h}} < |\Lambda_{\mathbf{h}}|$  quelconque. Alors il existe  $T_0 > 0$  tel que, pour tout  $T \geq T_0$ , on puisse trouver  $\varepsilon_T, \theta_T > 0$  et  $\rho_T : ]0, \theta_T[ \rightarrow ]0, 1[$  satisfaisant aux propriétés suivantes :*

- (i)  $\forall z \in \mathbf{M}_{(0, \varepsilon_T)}^{\mathbf{h}}, \quad \frac{P_T V^{\mathbf{h}}(z) - V^{\mathbf{h}}(z)}{T} \leq -\alpha_{\mathbf{h}}. \quad (V^{\mathbf{h}}\text{-dérive linéaire})$
- (ii)  $\forall z \in \mathbf{M}_{(0, \varepsilon_T)}^{\mathbf{h}}, \quad \forall 0 < \theta < \theta_T, \quad P_T(e^{\theta V^{\mathbf{h}}})(z) \leq \rho_T(\theta) e^{\theta V^{\mathbf{h}}}(z). \quad (e^{\theta V^{\mathbf{h}}}\text{-dérive géométrique})$

**Démonstration.** Fixons  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ . Si  $Z_0 = z \in M \setminus M_0^{\mathbf{h}}$ , on a pour tout  $T > 0$  :

$$V^{\mathbf{h}}(Z_T) - V^{\mathbf{h}}(z) = -\text{sgn}(\Lambda_{\mathbf{h}}) \int_0^T H_{\mathbf{h}}(Z_s) ds. \quad (11)$$

En passant à l'espérance, on obtient grâce au théorème de Fubini :

$$\frac{P_T V^{\mathbf{h}}(z) - V^{\mathbf{h}}(z)}{T} = -\text{sgn}(\Lambda_{\mathbf{h}}) \frac{1}{T} \int_0^T P_s H_{\mathbf{h}}(z) ds.$$

Si l'on pose  $\mu_T^z(\cdot) = (1/T) \int_0^T P_s(z, \cdot) ds \in \mathcal{P}_1(\mathbf{M})$ , alors ceci se réécrit sous la forme :

$$\frac{P_T V^{\mathbf{h}}(z) - V^{\mathbf{h}}(z)}{T} = -\text{sgn}(\Lambda_{\mathbf{h}}) \mu_T^z(H_{\mathbf{h}}). \quad (12)$$

Dans un premier temps, nous nous donnons comme objectif de prouver l'assertion suivante :

$$\exists T_0 > 0, \quad \forall T \geq T_0, \quad \forall z \in M_0^{\mathbf{h}}, \quad -\text{sgn}(\Lambda_{\mathbf{h}}) \mu_T^z(H_{\mathbf{h}}) < -\alpha_{\mathbf{h}}. \quad (13)$$

La mesure  $\mu_T^z$  correspond à la l'espérance de la mesure d'occupation empirique  $\Pi_T$  pour un processus parti de  $z$ . Pour  $T$  grand et  $z \in M_0^{\mathbf{h}}$ , on s'attend à ce qu'elle soit proche de  $\mu_{\mathbf{h}}$  et donc que le terme de gauche dans l'inégalité précédente soit proche de  $|\Lambda_{\mathbf{h}}|$ . Supposons par l'absurde  $\neg(13)$ . Dans ce cas, il existe une suite  $(z_n, T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $z_n \in M_0^{\mathbf{h}}$  et  $T_n \rightarrow \infty$ , tels que  $|\int_{M_0^{\mathbf{h}}} H_{\mathbf{h}} d\mu_{T_n}^{z_n} - \Lambda_{\mathbf{h}}| \geq |\Lambda_{\mathbf{h}}| - \alpha_{\mathbf{h}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Cela implique que la suite  $(\mu_{T_n}^{z_n})$ , qui est à valeurs dans le compact  $\mathcal{P}_1(M_0^{\mathbf{h}})$ , n'admet pas  $\mu_{\mathbf{h}}$  comme valeur d'adhérence. Comme  $\mu_{\mathbf{h}}$  est l'unique loi invariante par  $(P_t)$  sur  $M_0^{\mathbf{h}}$ , il nous suffit pour obtenir une contradiction de démontrer que toute valeur d'adhérence de  $(\mu_{T_n}^{z_n})$  appartient à  $\mathcal{P}_{inv}(M_0^{\mathbf{h}})$ . Or pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a :

$$\mu_{T_n}^{z_n} P_t(\cdot) = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} P_{s+t}(z_n, \cdot) ds = \mu_{T_n}^{z_n} + \frac{1}{T_n} \left[ \int_{T_n}^{T_n+t} P_s(z_n, \cdot) ds - \int_0^t P_s(z_n, \cdot) ds \right],$$

et donc  $\|\mu_{T_n}^{z_n} P_t - \mu_{T_n}^{z_n}\|_{VT} \leq 2t/T_n$ . Cette inégalité associée au caractère fellerien de  $(P_t)$  implique que toute valeur d'adhérence  $\mu_*$  de la suite  $(\mu_{T_n}^{z_n})_{n \in \mathbb{N}}$  doit vérifier  $\mu_* P_t = \mu_*$ . D'où la contradiction, ce qui prouve (13) par l'absurde.



Fixons  $T > T_0$ . L'application définie sur  $\mathbf{M}$  par

$$z \mapsto -\text{sgn}(\Lambda_{\mathbf{h}})\mu_T^z(H_{\mathbf{h}}) = \frac{1}{T} \int_0^T P_s H_{\mathbf{h}}(z) ds,$$

est continue, en conséquence du caractère fellerien du semi-groupe  $(P_t)$  et du théorème de convergence dominée. Ainsi, l'inégalité  $\mu_T^z(H_{\mathbf{h}}) < -\alpha_{\mathbf{h}}$  est vérifiée pour  $z$  dans un ouvert contenant  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$ . La compacité de  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$  entraîne l'existence d'un  $\varepsilon_T > 0$  tel que  $\mathbf{M}_{[0, \varepsilon_T]}^{\mathbf{h}}$  soit inclus dans cet ouvert. Le point (i) découle alors de (12).

Démontrons dorénavant le point (ii). Nous noterons  $\Sigma = -\text{sgn}(\Lambda_{\mathbf{h}}) \int_0^T H_{\mathbf{h}}(Z_s) ds$ , variable aléatoire bornée par  $T\|H_{\mathbf{h}}\|_{\infty, \mathbf{M}} < +\infty$ . L'égalité (11) donne :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbf{M}, \quad P_T(e^{\theta V^{\mathbf{h}}})(z) = e^{\theta V^{\mathbf{h}}(z)} e^{l(\theta, z)},$$

avec  $l(\theta, z) = \log [\mathbb{E}_z(e^{\theta \Sigma})]$ . Comme  $\Sigma$  est bornée, pour tout  $z \in \mathbf{M}$ , la log-Laplace  $\theta \mapsto l(\theta, z)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et vérifie

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \theta}(\theta, z) = \frac{\mathbb{E}_z(\Sigma e^{\theta \Sigma})}{\mathbb{E}_z(e^{\theta \Sigma})} = \mathbb{E}_{z, \theta}(\Sigma), \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}(\theta, z) = \frac{\mathbb{E}_z(\Sigma^2 e^{\theta \Sigma}) \mathbb{E}_z(e^{\theta \Sigma}) - \mathbb{E}_z(\Sigma e^{\theta \Sigma})^2}{\mathbb{E}_z(e^{\theta \Sigma})^2} = \mathbb{V}_{z, \theta}(\Sigma), \end{cases}$$

où  $\mathbb{E}_{z, \theta}$  et  $\mathbb{V}_{z, \theta}$  désignent respectivement l'espérance et la variance sous  $\mathbb{P}_{z, \theta}$ , définie comme la loi de densité  $e^{\theta \Sigma} / \mathbb{E}_z(e^{\theta \Sigma})$  par rapport à  $\mathbb{P}_z$ . Pour tous  $z \in \mathbf{M}_{(0, \varepsilon_T)}^{\mathbf{h}}$  et  $\theta \in \mathbb{R}_+$ , on a donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \theta}(0, z) = \mathbb{E}_z(\Sigma) = P_T V^{\mathbf{h}}(z) - V^{\mathbf{h}}(z) \leq -T\alpha_{\mathbf{h}}, \\ 0 \leq \frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}(\theta, z) \leq (T\|H_{\mathbf{h}}\|_{\infty, \mathbf{M}})^2. \end{cases}$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entraîne donc que  $l(\theta, z) \leq -\theta T\alpha_{\mathbf{h}} + (\theta T\|H_{\mathbf{h}}\|_{\infty, \mathbf{M}})^2/2$ . Si l'on note  $r_T(\theta)$  le second membre de cette inégalité, et  $\theta_T = -2\alpha_{\mathbf{h}}/(T\|H_{\mathbf{h}}\|_{\infty, \mathbf{M}}^2)$ , alors pour  $0 < \theta < \theta_T$  on a  $r_T(\theta) < 0$ . Ainsi l'application  $\rho_T : ]0, \theta_T[ \ni \theta \mapsto e^{r_T(\theta)}$  est à valeurs dans  $]0, 1[$ , et on a :

$$\forall 0 < \theta < \theta_T, \forall z \in \mathbf{M}_{(0, \varepsilon_T)}^{\mathbf{h}}, \quad P_T(e^{\theta V^{\mathbf{h}}})(z) = e^{\theta V^{\mathbf{h}}(z)} e^{l(\theta, z)} \leq \rho_T(\theta) e^{\theta V^{\mathbf{h}}(z)}. \quad \blacksquare$$

### 3.3 Extinctions

Il s'agit ici d'étudier les cas **a**, **b**, et **c** exposés dans la section 1.3.

**Théorème 3.3** (Extinction de l'espèce **y**). *Supposons  $\Lambda_{\mathbf{y}} < 0$ ,  $\Lambda_{\mathbf{x}} > 0$ , et  $Z_0 = z_0 \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$ . Alors l'événement<sup>34</sup>  $\text{Ext}_{\mathbf{y}}$  défini par les trois points suivants est réalisé avec probabilité 1 :*

- (i)  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \log(Y_t)/t \leq \Lambda_{\mathbf{y}}$ .
- (ii)  $\Pi_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \mu_{\mathbf{y}}$  étroitement.
- (iii) L'ensemble  $\omega$ -limite de la trajectoire  $(X_t, Y_t)$  est  $[x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\}$ .

De plus,  $Z_t$  converge en loi vers  $\mu_{\mathbf{y}}$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

34. On pourra se convaincre que  $\text{Ext}_{\mathbf{y}}$  est bien un événement en remarquant d'une part, que  $t \mapsto (X_t, Y_t)$  et  $t \mapsto \Pi_t$  sont continus donc les limites peuvent être prises sur  $\mathbb{Q}$ , et d'autre part que l'ensemble  $\omega$ -limite est caractérisé par le fait que parmi une base dénombrable d'ouverts, les ouverts récurrents pour  $(X_t, Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  sont exactement ceux qui l'intersectent.

**Démonstration.** Nous allons débiter par le point (i). Fixons  $0 < \alpha_{\mathbf{x}} < \Lambda_{\mathbf{x}}$  et  $0 < \alpha_{\mathbf{y}} < -\Lambda_{\mathbf{y}}$ . La proposition 3.2 nous permet d'obtenir  $T > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\theta > 0$  et  $0 < \rho < 1$  tels que

$$\forall z \in \mathbf{M}_{(0,\varepsilon)}^{\mathbf{x}}, \quad \frac{P_T V^{\mathbf{x}}(z) - V^{\mathbf{x}}(z)}{T} \leq -\alpha_{\mathbf{x}}, \quad (14)$$

$$\forall z \in \mathbf{M}_{(0,\varepsilon)}^{\mathbf{y}}, \quad \begin{cases} \frac{P_T V^{\mathbf{y}}(z) - V^{\mathbf{y}}(z)}{T} \leq -\alpha_{\mathbf{y}}, \\ P_T(e^{\theta V^{\mathbf{y}}})(z) \leq \rho V^{\mathbf{y}}(z). \end{cases} \quad (15)$$

On définit alors pour  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$  :

$$\begin{aligned} \tau_{\varepsilon}^{\mathbf{h},\text{Out}} &= \inf \{k \in \mathbb{N} : Z_{kT} \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_{[0,\varepsilon]}^{\mathbf{h}}\}, & \tau_{\varepsilon/2}^{\mathbf{h},\text{In}} &= \inf \{k \in \mathbb{N} : Z_{kT} \in \mathbf{M}_{[0,\varepsilon/2]}^{\mathbf{h}}\}, \\ \sigma_{\varepsilon}^{\mathbf{h},\text{Out}} &= \inf \{t \in \mathbb{R}_+ : Z_t \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_{[0,\varepsilon]}^{\mathbf{h}}\}, & \sigma_{\varepsilon/2}^{\mathbf{h},\text{In}} &= \inf \{t \in \mathbb{R}_+ : Z_t \in \mathbf{M}_{[0,\varepsilon/2]}^{\mathbf{h}}\}. \end{aligned}$$

Les temps  $\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{h},\text{Out}}$  et  $\tau_{\varepsilon/2}^{\mathbf{h},\text{In}}$  sont des temps d'arrêt pour  $(Z_{nT}, \mathcal{F}_{nT})_{n \in \mathbb{N}}$ , tandis que  $\sigma_{\varepsilon}^{\mathbf{h},\text{Out}}$  et  $\sigma_{\varepsilon/2}^{\mathbf{h},\text{In}}$  sont des temps d'arrêt pour  $(Z_t, \mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  (entrée dans un fermé pour un processus càdlàg).

Dans un premier temps, nous allons démontrer que :

$$\exists c > 0, \forall z \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}}, \quad \mathbb{P}_z(\tau_{\varepsilon/2}^{\mathbf{y},\text{In}} < +\infty) \geq c. \quad (16)$$

Supposons  $Z_0 = z \in \mathbf{M}_{(0,\varepsilon)}^{\mathbf{x}}$ , et posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M_n = V^{\mathbf{x}}(Z_{nT}) + n\alpha_{\mathbf{x}}T$ . Le processus  $(M_n)$  est borné inférieurement par  $-\log A$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_z \left[ M_{(n+1) \wedge \tau_{\varepsilon}^{\mathbf{x},\text{Out}}} \mid \mathcal{F}_{nT} \right] &= \mathbf{1}_{\{\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{x},\text{Out}} > n\}} \mathbb{E}_z [M_{n+1} \mid \mathcal{F}_{nT}] + M_{\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{x},\text{Out}}} \mathbf{1}_{\{\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{x},\text{Out}} \leq n\}} \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{x},\text{Out}} > n\}} (P_T V^{\mathbf{x}}(Z_{nT}) + (n+1)\alpha_{\mathbf{x}}T) + M_{\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{x},\text{Out}}} \mathbf{1}_{\{\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{x},\text{Out}} \leq n\}} \\ &\leq M_{n \wedge \tau_{\varepsilon}^{\mathbf{x},\text{Out}}}, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité (14). Autrement dit, comme  $\mathbb{E}_z(M_0) = V^{\mathbf{x}}(z) < +\infty$ , le processus  $(M_{n \wedge \tau_{\varepsilon}^{\mathbf{x},\text{Out}}})$  est une  $(\mathcal{F}_{nT})$ -surmartingale. Il s'ensuit que l'on a :

$$\alpha_{\mathbf{x}}T \mathbb{E}_z(n \wedge \tau_{\varepsilon}^{\mathbf{x},\text{Out}}) \leq \mathbb{E}_z(M_{n \wedge \tau_{\varepsilon}^{\mathbf{x},\text{Out}}}) \leq V^{\mathbf{x}}(z).$$

Par convergence monotone quand  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient  $\mathbb{E}_z(\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{x},\text{Out}}) \leq V^{\mathbf{x}}(z)/(\alpha_{\mathbf{x}}T) < +\infty$ . Par conséquent, si  $(Z_t)$  démarre en  $z \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}}$  alors on aura :

$$\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{x},\text{Out}} < +\infty \quad \text{p.s.} \quad (17)$$

Nous avons besoin du lemme qui suit afin de poursuivre.

**Lemme 3.4.** *Soient  $\mathcal{K}$  un compact et  $U$  un ouvert de  $M$ , tels que pour tout  $p \in \mathcal{K}$  il existe  $q \in U \cap \text{Acc}(p)$ . Notons  $\sigma = \inf \{t > 0 : Z_t \in U \times \mathcal{E}\}$  le temps d'entrée dans  $U \times \mathcal{E}$ . Alors il existe  $c > 0$  tel que :*

$$\forall z \in \mathcal{K} \times \mathcal{E}, \quad \mathbb{P}_z(\sigma < +\infty) \geq c. \quad (18)$$

**Démonstration.** Soit  $z = (p, i) \in \mathcal{K} \times \mathcal{E}$ . Par hypothèse l'ouvert  $U$  est accessible depuis  $p$ , donc d'après la proposition-définition 2.5, il existe  $t(z) \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\delta(z) := \mathbb{P}_z(Z_{t(z)} \in U \times \mathcal{E}) > 0$ . Le caractère fellerien du processus  $(Z_t)$ , associé au théorème de Portmanteau, montre l'existence d'un ouvert  $\mathcal{V}_z$  contenant  $z$  tel que pour tout  $z' \in \mathcal{V}_z$ , on ait  $\mathbb{P}_{z'}(\sigma < +\infty) \geq \mathbb{P}_{z'}(Z_{t(z)} \in U) > \delta(z)/2$ . En extrayant un sous-recouvrement fini de  $\mathcal{K}$  par la famille  $(\mathcal{V}_z)_{z \in \mathcal{K}}$ , on montre l'existence de  $c > 0$

tel que (18) soit vérifiée.  $\square$

Etant donné que  $[x_{min}, x_{max}] \times \{0\} \subseteq \Gamma$ , on peut appliquer ce lemme avec  $\mathcal{K} = M \setminus M_{[0, \varepsilon]}^{\mathbf{x}}$  et  $U = M_{[0, \varepsilon/2]}^{\mathbf{y}}$ . On obtient l'existence de  $c > 0$  tel que pour tout  $z \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_{[0, \varepsilon]}^{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbb{P}_z(\sigma_{\varepsilon/2}^{\mathbf{y}, \text{In}} < +\infty) \geq c$ . En combinant ceci avec (17) au moyen de la propriété de Markov forte, appliquée au processus fellerien à trajectoires càdlàg  $(Z_t)$  et au  $(\mathcal{F}_t)$ -temps d'arrêt  $T\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{x}, \text{Out}}$ , on obtient (16).

Dans un second temps, définissons l'événement  $\mathcal{A} = \{\limsup_{t \rightarrow +\infty} V^{\mathbf{y}}(Z_t)/t \leq -\alpha_{\mathbf{y}}\}$ , et montrons l'existence d'une constante  $c' > 0$  telle que :

$$\forall z \in \mathbf{M}_{[0, \varepsilon/2]}^{\mathbf{y}}, \quad \mathbb{P}_z(\mathcal{A}) \geq c'. \quad (19)$$

Déjà remarquons que dans le cas trivial où  $z \in \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}$ , on a  $\mathbb{P}_z(\mathcal{A}) = 1$ . D'après (15),  $e^{\theta V^{\mathbf{y}}} : (x, y, i) \mapsto y^{\theta}$  est une fonction surharmonique pour le noyau  $P_T$  sur  $\mathbf{M}_{(0, \varepsilon)}^{\mathbf{y}}$ , majorée par  $A^{\theta}$  sur ce domaine. Pour  $Z_0 = z \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}$ , si l'on pose  $W_n = Y_{nT}^{\theta}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors le processus  $(W_{n \wedge \tau_{\varepsilon}^{\mathbf{y}, \text{Out}}})$  est une surmartingale positive. En se donnant  $0 < h < \varepsilon$ , on a donc, pour tout  $z \in \mathbf{M}_{(0, h]}^{\mathbf{y}}$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}_z \left( W_{n \wedge \tau_{\varepsilon}^{\mathbf{y}, \text{Out}}} \mathbf{1}_{\{\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{y}, \text{Out}} < +\infty\}} \right) \leq \mathbb{E}_z(W_0) \leq h^{\theta}.$$

Par convergence dominée quand  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient  $\mathbb{E}_z \left( W_{\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{y}, \text{Out}}} \mathbf{1}_{\{\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{y}, \text{Out}} < +\infty\}} \right) \leq h^{\theta}$ , d'où :

$$\mathbb{P}_z(\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{y}, \text{Out}} < +\infty) \leq \frac{1}{\varepsilon^{\theta}} \mathbb{E}_z \left( W_{\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{y}, \text{Out}}} \mathbf{1}_{\{\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{y}, \text{Out}} < +\infty\}} \right) \leq (h/\varepsilon)^{\theta} < 1. \quad (20)$$

Pour  $h = \varepsilon/2$ , on obtient  $\mathbb{P}_z(\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{y}, \text{Out}} = +\infty) \geq 1 - 1/2^{\theta} > 0$ . Supposons  $Z_0 = z \in \mathbf{M}_{(0, \varepsilon/2]}$ , et posons pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\tilde{M}_n = \sum_{k=1}^n (V^{\mathbf{y}}(Z_{kT}) - P_T V^{\mathbf{y}}(Z_{(k-1)T})).$$

Le processus  $(\tilde{M}_n)$  est une  $(\mathcal{F}_{nT})$ -martingale, dont les incréments sont bornés par  $2T\|H_{\mathbf{y}}\|_{\infty, \mathbf{M}}$ , donc d'après la loi forte des grands nombres pour les martingales (voir l'annexe D), on a presque sûrement  $\tilde{M}_n/n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Or pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{V^{\mathbf{y}}(Z_{nT})}{nT} = \frac{\tilde{M}_n + V^{\mathbf{y}}(Z_0)}{nT} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_T V^{\mathbf{y}}(Z_{kT}) - V^{\mathbf{y}}(Z_{kT})}{T}.$$

Avec (15) en tête, on en déduit que presque sûrement :

$$(\exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, Y_{nT} < \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{V^{\mathbf{y}}(Z_{nT})}{nT} \leq -\alpha_{\mathbf{y}} \quad \text{p.s.} \quad (21)$$

Etant donné que pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq t \leq T$ , on a  $V^{\mathbf{y}}(Z_{nT+t}) - V^{\mathbf{y}}(Z_{nT}) \leq \|H_{\mathbf{y}}\|_{\infty, \mathbf{M}} T$ , l'événement à droite de l'implication (21) n'est autre que  $\mathcal{A}$ . En particulier,  $\mathcal{A}$  est réalisé presque sûrement sur l'événement  $\{\tau_{\varepsilon}^{\mathbf{y}, \text{Out}} = +\infty\}$ , qui est de probabilité supérieure ou égale à  $c' := 1 - 1/2^{\theta} > 0$  d'après (20). Ceci montre (19).

L'événement  $\mathcal{A}$  est indistinguable de l'événement  $\mathcal{A}_{\tau} = \{\limsup_{t \rightarrow +\infty} V^{\mathbf{y}}(Z_{\tau+t})/(\tau+t) \leq -\alpha_{\mathbf{y}}\}$  pour tout temps aléatoire  $\tau$  fini presque sûrement : on dira que  $\mathcal{A}$  est invariant par translation temporelle. La propriété de Markov forte appliquée en  $T\tau_{\varepsilon/2}^{\mathbf{y}, \text{In}}$  donne alors, pour tout  $z \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$ , en utilisant

(16) et (19) :  $\mathbb{P}_z(\mathcal{A}) \geq c c'$ . A partir de maintenant fixons  $z_0 \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$  et supposons  $Z_0 = z_0$ . On a :

$$\mathbf{1}_{\mathcal{A}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{z_0}(\mathcal{A} \mid \mathcal{F}_t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{Z_t}(\mathcal{A}) \geq c c' > 0 \quad \text{p.s.,}$$

la première égalité étant une conséquence du théorème de convergence des martingales de Doob, et la deuxième une conséquence de la propriété faible de Markov et de l'invariance de  $\mathcal{A}$  par translation dans le temps. Ceci prouve que  $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} = 1$  presque sûrement. En appliquant ceci pour tout  $\alpha_{\mathbf{y}}$  dans une famille dénombrable de supremum  $-\Lambda_{\mathbf{y}}$ , on prouve que le point (i) est réalisé avec probabilité 1.

De plus, presque sûrement, toutes les valeurs d'adhérences de  $(\Pi_t)$  dans  $\mathcal{P}_1(\mathbf{M})$  sont invariantes par  $(P_t)$  et, en conséquence de (i), supportées par  $M_0^{\mathbf{y}}$ . Ainsi  $(\Pi_t)$  a presque sûrement pour unique valeur d'adhérence  $\mu_{\mathbf{y}}$ , ce qui prouve le point (ii).

Enfin, d'après le théorème 3.1,  $\text{supp}(\mu_{\mathbf{y}}) = ([x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\}) \times \mathcal{E}$ , donc presque sûrement, pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  intersectant le segment  $[x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\}$ , on a :

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \Pi_t(\mathcal{O} \times \mathcal{E}) \geq \mu_{\mathbf{y}}(\mathcal{O} \times \mathcal{E}) > 0.$$

Ceci implique la récurrence de l'ouvert  $\mathcal{O}$  pour la trajectoire de  $(X_t, Y_t)$ , et donc l'ensemble  $\omega$ -limite de  $(X_t, Y_t)$  contient  $[x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\}$  avec probabilité 1. Réciproquement, fixons  $0 < p_0 < x_{\min}$  et  $p_1 > x_{\max}$ . On a pour tout  $i \in \mathcal{E}$ ,  $F_x^i(p_0, 0) > 0$  et  $F_x^i(p_1, 0) < 0$ . Par conséquent pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit :

$$\forall 0 \leq y \leq \varepsilon, \quad F_x^i(p_0, y) > 0 \quad \text{et} \quad F_x^i(p_1, y) < 0. \quad (22)$$

Or d'après le point (i), pour tout  $\omega$  dans un événement  $\Omega'$  de probabilité 1, on a  $Y_t(\omega) \leq \varepsilon$  à partir d'un certain temps  $t_0(\omega)$ . D'après ce que nous venons de voir, quitte à modifier  $\Omega'$  on peut supposer qu'il existe  $t_1(\omega) \geq t_0(\omega)$  tel que  $x_{\min} \leq X_{t_1(\omega)}(\omega) \leq x_{\max}$ . La propriété (22) montre alors que  $(X_t, Y_t)$  ne peut pas quitter la boîte  $[p_0, p_1] \times [0, \varepsilon]$  par les frontières latérales  $\{p_0\} \times [0, \varepsilon]$  et  $\{p_1\} \times [0, \varepsilon]$  pour  $t \geq t_1(\omega)$ . Comme pendant ce temps  $Y_t \leq \varepsilon$ , on voit que  $(X_t, Y_t)$  reste piégé dans cette boîte, et donc l'ensemble  $\omega$ -limite de  $(X_t, Y_t)$  est inclus dans  $[p_0, p_1] \times [0, \varepsilon]$  avec probabilité 1. En faisant tendre,  $(p_0, p_1, \varepsilon)$  vers  $(x_{\min}, x_{\max}, 0)$  au moyen d'une suite, on prouve que (iii) est réalisé presque sûrement.

Il nous reste à démontrer la convergence en loi de  $Z_t$  vers  $\mu_{\mathbf{y}}$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbf{M})$ . D'après le point 4 du théorème 3.1, il existe  $C, \alpha > 0$  tels que :

$$\forall z \in \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}, \quad |P_t f(z) - \mu_{\mathbf{h}} f| \leq C e^{-\alpha t} \|f\|_{\infty}.$$

Fixons  $\delta > 0$ . On peut choisir  $t_0$  assez grand de façon à ce que :

$$\forall z \in \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}, \quad |P_{t_0} f(z) - \mu_{\mathbf{y}} f| \leq \delta.$$

Par continuité de  $P_{t_0} f$  et compacité de  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}$ , il existe donc  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall z \in \mathbf{M}_{[0, \varepsilon]}^{\mathbf{y}}, \quad |P_{t_0} f(z) - \mu_{\mathbf{y}} f| \leq 2\delta. \quad (23)$$

La convergence presque sûre de  $Y_t$  vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  implique sa convergence en probabilité, autrement dit il existe  $t_1 \geq 0$  tel que :

$$\forall t \geq t_1, \quad P_t(z_0, \mathbf{M}_{[0, \varepsilon]}^{\mathbf{y}}) \geq 1 - \delta. \quad (24)$$

Soit  $t \geq t_1 + t_0$ . Alors

$$P_t f(z_0) - \mu_{\mathbf{y}} f = \int_{\mathbf{M}_{[0, \varepsilon]}^{\mathbf{y}}} P_{t-t_0}(z_0, dz') [P_{t_0} f(z') - \mu_{\mathbf{y}} f] + \int_{\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_{[0, \varepsilon]}^{\mathbf{y}}} P_{t-t_0}(z_0, dz') [P_{t_0} f(z') - \mu_{\mathbf{y}} f].$$

En utilisant (23) et (24), on obtient  $|P_t f(z_0) - \mu_{\mathbf{y}} f| \leq 2\delta + 2\delta \|f\|_\infty$ . On en déduit que  $P_t f(z_0) \rightarrow \mu_{\mathbf{y}} f$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , et ceci pour tout  $f \in \mathcal{C}(\mathbf{M})$ , d'où la dernière assertion du théorème. ■

**Théorème 3.5** (Extinction de l'espèce  $\mathbf{x}$ ). *Supposons  $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$ ,  $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ ,  $\{0\} \times [y_{\min}, y_{\max}] \subseteq \Gamma$  et  $Z_0 = z_0 \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$ . Alors l'événement  $\text{Ext}_{\mathbf{x}}$  défini par les trois points suivants est réalisé avec probabilité 1 :*

- (i)  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \log(X_t)/t \leq \Lambda_{\mathbf{x}}$ .
- (ii)  $\Pi_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \mu_{\mathbf{x}}$  étroitement.
- (iii) L'ensemble  $\omega$ -limite de la trajectoire  $(X_t, Y_t)$  est  $\{0\} \times [y_{\min}, y_{\max}]$ . De plus  $Z_t$ , converge en loi vers  $\mu_{\mathbf{x}}$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

**Démonstration.** Il s'agit d'une copie de la démonstration du théorème 3.5 en échangeant le rôle de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{y}$ . L'hypothèse  $\{0\} \times [y_{\min}, y_{\max}] \subseteq \Gamma$  permet le moment venu d'appliquer le lemme 3.4. ■

**Théorème 3.6.** *Supposons  $\Lambda_{\mathbf{y}} < 0$  et  $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ . Soient  $\text{Ext}_{\mathbf{y}}$  et  $\text{Ext}_{\mathbf{x}}$  les événements décrits par les points (i), (ii), (iii) des théorèmes 3.3 et 3.5 respectivement. Alors pour tout  $z = (x, y, i) \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$  :*

$$\mathbb{P}_z(\text{Ext}_{\mathbf{y}} \cup \text{Ext}_{\mathbf{x}}) = 1, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_z(\text{Ext}_{\mathbf{y}}) > 0.$$

Si de plus  $\text{Acc}(x, y) \supseteq \{0\} \times [y_{\min}, y_{\max}]$ , alors  $\mathbb{P}_z(\text{Ext}_{\mathbf{x}}) > 0$ , ce qui est au moins le cas pour  $x$  suffisamment petit. Enfin, pour  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ , si  $\mathbb{P}_z(\text{Ext}_{\mathbf{h}}) > 0$ , alors  $\mathbb{P}_z(Z_t \in \cdot | \text{Ext}_{\mathbf{h}})$  converge en loi vers  $\mu_{\mathbf{h}}$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

**Démonstration.** En guise de préliminaire, nous énonçons le lemme suivant.

**Lemme 3.7.** *Soit  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$  et supposons  $\Lambda_{\mathbf{h}} < 0$ . Si  $\mathbf{h} = \mathbf{y}$  (resp. si  $\mathbf{h} = \mathbf{x}$ ), l'événement  $\{Y_t \rightarrow 0\}$  (resp.  $\{X_t \rightarrow 0\}$ ) implique presque sûrement  $\text{Ext}_{\mathbf{h}}$ . De plus, il existe  $\varepsilon, \theta > 0$  tels que :*

$$\forall 0 < h < \varepsilon, \forall z \in \mathbf{M}_{[0, h]}^{\mathbf{h}}, \quad \mathbb{P}_z(\text{Ext}_{\mathbf{h}}) \geq 1 - (h/\varepsilon)^\theta.$$

**Démonstration.** On peut se restreindre au cas  $\mathbf{h} = \mathbf{y}$ . En reprenant la preuve du théorème 3.3, on voit que l'événement  $\{Y_t \rightarrow 0\}$  implique presque sûrement les points (ii) et (iii) de la définition de  $\text{Ext}_{\mathbf{y}}$ . De plus, pour tout  $0 < \alpha_{\mathbf{y}} < -\Lambda_{\mathbf{y}}$ , il existe  $\varepsilon, \theta, T > 0$  tels que :

$$\star \{ \exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, Y_{nT} < \varepsilon \} \subseteq \{ \limsup_{t \rightarrow +\infty} \log(Y_t)/t \leq -\alpha_{\mathbf{y}} \} \text{ presque sûrement ;}$$

$$\star \text{ pour tous } 0 < h < \varepsilon \text{ et } z \in \mathbf{M}_{[0, h]}^{\mathbf{y}}, \mathbb{P}_z(\tau_\varepsilon^{\mathbf{y}, \text{Out}} = +\infty) \geq 1 - (h/\varepsilon)^\theta > 0.$$

En appliquant le premier item pour tout  $\alpha_{\mathbf{y}}$  dans une famille dénombrable de supremum  $-\Lambda_{\mathbf{y}}$ , on comprend que presque sûrement :

$$\{Y_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0\} \subseteq \{ \limsup_{t \rightarrow +\infty} \log(Y_t)/t \leq \Lambda_{\mathbf{y}} \}.$$

Ceci prouve la première assertion du lemme.

Si maintenant on fixe  $\alpha_{\mathbf{y}} = -\Lambda_{\mathbf{y}}/2$ , le premier item montre que sur  $\{\tau_\varepsilon^{\mathbf{y}, \text{Out}} = +\infty\}$ , on a  $Y_t \rightarrow 0$  presque sûrement, donc  $\text{Ext}_{\mathbf{y}}$  aussi. Le deuxième item permet de conclure. □

Appliquons le lemme précédent : on peut choisir  $h_1 > 0$  suffisamment petit de sorte qu'il existe  $c_1 > 0$  tel que :

$$\forall \mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}, \forall z \in \mathbf{M}_{[0, h_1]}^{\mathbf{h}}, \quad \mathbb{P}_z(\text{Ext}_{\mathbf{h}}) \geq c_1.$$

De plus on peut appliquer le lemme 3.4 avec  $\mathcal{K} = M \setminus M_{[0, h_1]}^{\mathbf{x}}$  et  $U = M_{[0, h_1]}^{\mathbf{y}}$ , ce qui entraîne l'existence de  $c > 0$  tel que :

$$\forall z \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_{[0, h_1]}^{\mathbf{x}}, \quad \mathbb{P}_z(\sigma_{h_1}^{\mathbf{y}, \text{In}} < +\infty) \geq c.$$

Par conséquent, en utilisant la propriété forte de Markov et l'invariance par translation dans le temps des événements  $\text{Ext}_{\mathbf{x}}$  et  $\text{Ext}_{\mathbf{y}}$ , on trouve que pour tout  $z \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$ , on a  $\mathbb{P}_z(\text{Ext}_{\mathbf{x}} \cup \text{Ext}_{\mathbf{y}}) \geq c c_1$ . Par un argument de martingale déjà utilisé dans la preuve du théorème 3.3, on a pour tout  $z \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$  :

$$\mathbf{1}_{\text{Ext}_{\mathbf{x}} \cup \text{Ext}_{\mathbf{y}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_z(\mathbf{1}_{\text{Ext}_{\mathbf{x}} \cup \text{Ext}_{\mathbf{y}}} | \mathcal{F}_t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{Z_t}(\text{Ext}_{\mathbf{x}} \cup \text{Ext}_{\mathbf{y}}) \geq c c_1 > 0 \quad \text{p.s.}$$

Par conséquent  $\mathbb{P}_z(\text{Ext}_{\mathbf{x}} \cup \text{Ext}_{\mathbf{y}}) = 1$ .

Soit  $(p, i) \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$ . On a  $\text{Acc}(p) \supseteq [x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\}$  ce qui implique  $\mathbb{P}_{p,i}(\sigma_{h_1}^{\mathbf{y}, \text{In}} < +\infty) =: c' > 0$ , et donc  $\mathbb{P}_{p,i}(\text{Ext}_{\mathbf{y}}) \geq c' c_1 > 0$ . Si  $\text{Acc}(p) \supseteq \{0\} \times [y_{\min}, y_{\max}]$ , un argument similaire implique  $\mathbb{P}_{p,i}(\text{Ext}_{\mathbf{x}}) > 0$ .

Enfin, en ce qui concerne les convergences en loi, on traitera le cas  $\mathbf{h} = \mathbf{y}$ , l'autre étant identique. Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbf{M})$ , et fixons  $\delta > 0$ . De même que dans la preuve de l'assertion finale du théorème 3.3, on peut trouver  $\varepsilon_0, t_0 > 0$  tels que

$$\forall z \in \mathbf{M}_{[0, \varepsilon_0]}^{\mathbf{y}}, \quad |P_{t_0} f(z) - \mu_{\mathbf{y}} f| \leq \delta. \quad (25)$$

Le lemme 3.7 implique que l'on peut choisir  $h \leq \varepsilon_0$  suffisamment petit de sorte que

$$\forall z \in \mathbf{M}_{[0, h]}^{\mathbf{y}}, \quad \mathbb{P}_z(\text{Ext}_{\mathbf{y}}) \geq 1 - \delta. \quad (26)$$

En outre, il existe  $t_1 \geq 0$  tel que

$$\forall s \geq t_1, \quad \mathbb{P}_{p,i}(Z_t \in \mathbf{M}_{[0, h]}^{\mathbf{y}} | \text{Ext}_{\mathbf{y}}) \geq 1 - \delta. \quad (27)$$

Pour tout  $t \geq t_0 + t_1$ , on a en utilisant (27) :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_{p,i}[f(Z_t) | \text{Ext}_{\mathbf{y}}] - \mu_{\mathbf{y}} f| &\leq \left| \mathbb{E}_{p,i} \left[ (f(Z_t) - \mu_{\mathbf{y}} f) \mathbf{1}_{Z_{t-t_0} \in \mathbf{M}_{0,h}^{\mathbf{y}}} | \text{Ext}_{\mathbf{y}} \right] \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E}_{p,i} \left[ (f(Z_t) - \mu_{\mathbf{y}} f) \mathbf{1}_{Z_{t-t_0} \notin \mathbf{M}_{0,h}^{\mathbf{y}}} | \text{Ext}_{\mathbf{y}} \right] \right| \\ &\leq \frac{1}{\mathbb{P}_{p,i}(\text{Ext}_{\mathbf{y}})} \left| \mathbb{E}_{p,i} \left[ (f(Z_t) - \mu_{\mathbf{y}} f) \mathbf{1}_{Z_{t-t_0} \in \mathbf{M}_{0,h}^{\mathbf{y}}} \mathbf{1}_{\text{Ext}_{\mathbf{y}}} \right] \right| + 2\|f\|_{\infty} \delta \end{aligned}$$

La propriété faible de Markov en  $t_0$  associée à l'invariance par translation temporelle de  $\text{Ext}_{\mathbf{y}}$  donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{p,i} \left[ (f(Z_t) - \mu_{\mathbf{y}} f) \mathbf{1}_{Z_{t-t_0} \in \mathbf{M}_{0,h}^{\mathbf{y}}} \mathbf{1}_{\text{Ext}_{\mathbf{y}}} \right] &= \mathbb{E}_{p,i} \left[ \mathbf{1}_{Z_{t-t_0} \in \mathbf{M}_{0,h}^{\mathbf{y}}} \mathbb{E}_{Z_{t-t_0}} \left[ (f(Z_{t_0}) - \mu_{\mathbf{y}} f) \mathbf{1}_{\text{Ext}_{\mathbf{y}}} \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_{p,i} \left[ \mathbf{1}_{Z_{t-t_0} \in \mathbf{M}_{0,h}^{\mathbf{y}}} \mathbb{E}_{Z_{t-t_0}} \left[ (f(Z_{t_0}) - \mu_{\mathbf{y}} f) \right] \right] \\ &\quad - \mathbb{E}_{p,i} \left[ \mathbf{1}_{Z_{t-t_0} \in \mathbf{M}_{0,h}^{\mathbf{y}}} \mathbb{E}_{Z_{t-t_0}} \left[ (f(Z_{t_0}) - \mu_{\mathbf{y}} f) \mathbf{1}_{\neg \text{Ext}_{\mathbf{y}}} \right] \right]. \end{aligned}$$

En utilisant les inéquations (25) sur le premier terme et (26) sur le second, on trouve :

$$\left| \mathbb{E}_{p,i} \left[ (f(Z_t) - \mu_{\mathbf{y}} f) \mathbf{1}_{Z_{t-t_0} \in \mathbf{M}_{0,h}^{\mathbf{y}}} \mathbf{1}_{\text{Ext}_{\mathbf{y}}} \right] \right| \leq \delta + 2\|f\|_{\infty} \delta.$$

Finalement on obtient donc :

$$\forall t \geq t_0 + t_1, \quad |\mathbb{E}_{p,i} [f(Z_t) | \text{Ext}_{\mathbf{y}}] - \mu_{\mathbf{y}} f| \leq \frac{\delta + 2\|f\|_{\infty}\delta}{\mathbb{P}_{p,i}(\text{Ext}_{\mathbf{y}})} + 2\|f\|_{\infty}\delta.$$

Comme  $\delta > 0$  et  $f \in \mathcal{C}(\mathbf{M})$  sont arbitraires, on a  $\mathbb{P}_{p,i}(Z_t \in \cdot | \text{Ext}_{\mathbf{y}}) \rightarrow \mu_{\mathbf{y}}$  en loi. ■

### 3.4 Persistance

Dans cette section, nous nous penchons sur les cas **d** et **e** de la section 1.3.

**Théorème 3.8** (Persistance sûre). *Supposons  $\Lambda_{\mathbf{x}} > 0$  et  $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$ . Alors il existe une unique loi  $\Pi \in \mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0)$ . De plus :*

1. *La loi  $\Pi$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\ell_{\mathbf{M}}$ .*
2. *Il existe  $\theta > 0$  tel que*

$$\int_{\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0} \Pi(dx, dy, di) \left( \frac{1}{x^{\theta}} + \frac{1}{y^{\theta}} \right) < \infty.$$

3. *Le support de  $\Pi$  est  $\Gamma \times \mathcal{E}$ , et  $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$ .*
4. *Pour toute condition initiale dans  $\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$ , presque sûrement :*
  - (a)  $\Pi_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \Pi$  *étroitement ;*
  - (b) *l'ensemble  $\omega$ -limite de la trajectoire  $(X_t, Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est  $\Gamma$ .*

5. *S'il existe un point  $p^* \in M \setminus M_0$  accessible et vérifiant le critère fort d'Hörmander<sup>35</sup>, alors on peut trouver  $C, \alpha > 0$  tels que pour toute condition initiale  $z = (x, y, i) \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :*

$$\|\mathbb{P}_z(Z_t \in \cdot) - \Pi\|_{VT} \leq C \left( 1 + \frac{1}{x^{\theta}} + \frac{1}{y^{\theta}} \right) e^{-\alpha t}. \quad (28)$$

**Démonstration.** Fixons une condition initiale  $(x, y, i) \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$  quelconque. Souvenons-nous (corollaire 2.15) que l'ensemble  $\mathcal{L}$  des valeurs d'adhérence de  $(\Pi_t)$  pour la topologie étroite dans  $\mathcal{P}_1(\mathbf{M})$  est toujours non vide, et que sur un ensemble  $\Omega' \subseteq \Omega$  de probabilité 1, il est constitué de probabilités invariantes pour le semi-groupe  $(P_t)$ . Dans la suite on raisonne sur  $\Omega'$ , et on se donne  $\Pi \in \mathcal{L}$ . Pour tout  $t > 0$ , on a :

$$\frac{\log(X_t) - \log(x)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t H_{\mathbf{x}}(Z_s) ds = \Pi_t(H_{\mathbf{x}}).$$

Or,  $(x, y) \mapsto \log(x)$  est bornée supérieurement sur  $M$ , ce qui implique :

$$\Pi(H_{\mathbf{x}}) \leq 0. \quad (29)$$

Comme  $\mathbf{M}_0^{\times}$  et  $\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0^{\times}$  sont absorbants, on a

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi_1, \quad (30)$$

où  $\Pi_0 = \Pi(\mathbf{M}_0^{\times} \cap \cdot)$  et  $\Pi_1 = \Pi(\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0^{\times} \cap \cdot)$  sont également invariantes pour  $(P_t)$ . Dans un premier temps nous allons démontrer que

$$\Pi_1(H_{\mathbf{x}}) = 0. \quad (31)$$

---

35. Voir la définition A.18.

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$  quelconque, et notons  $\tilde{f} : \mathbf{M} \ni (x, y, i) \mapsto f(x)$ . Alors

$$\forall (x, y, i) \in \mathbf{M}, \quad \mathcal{L}\tilde{f}(x, y, i) = F_x^i(x, y)f'(x) = H_{\mathbf{x}}(x, y, i)xf'(x).$$

Définissons pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  la fonction  $f_n$  coïncidant avec le logarithme sur  $[\frac{1}{n}, +\infty[$  et prolongée à gauche par sa tangente, c'est-à-dire donnée par  $f_n(x) = \log(1/n) + n(x - 1/n)$  pour tout  $0 \leq x \leq 1/n$ .

C'est une famille de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ , vérifiant en outre  $|xf'_n(x)| \leq 1$  pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}_+$ . Avec des notations évidentes, on voit que pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x, y, i) \in \mathbf{M}$ ,

$$x \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \mathcal{L}\tilde{f}_n(x, y, i) = H_{\mathbf{x}}(x, y, i),$$

et que de plus  $\|\mathcal{L}\tilde{f}_n\|_{\infty, \mathbf{M}} \leq \|H_{\mathbf{x}}\|_{\infty, \mathbf{M}} < \infty$ . Vis-à-vis de la mesure  $\Pi_1$ , finie et supportée par  $\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}}$ , il y a donc convergence dominée de la suite  $\mathcal{L}\tilde{f}_n$  vers  $H_{\mathbf{x}}$ . Or, l'invariance  $\Pi_1$  par  $(P_t)$  fournit  $\Pi_1 \mathcal{L}\tilde{f}_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On en déduit (31) par passage à la limite quand  $n \rightarrow \infty$ . En évaluant (30) en  $H_{\mathbf{x}}$ , on trouve  $\Pi(H_{\mathbf{x}}) = \Pi_0(H_{\mathbf{x}})$ , et donc (29) devient :  $\Pi_0(H_{\mathbf{x}}) \leq 0$ . Or par unicité de la loi invariante sur  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{x}}$  d'une part, on a  $\Pi_0 = \Pi_0(\mathbf{M}_0^{\mathbf{x}})\mu_{\mathbf{x}}$ , et par hypothèse d'autre part, on a  $\mu_{\mathbf{x}}(H_{\mathbf{x}}) = \Lambda_{\mathbf{x}} > 0$ . Ceci implique que  $\Pi_0$  est de masse nulle. Par conséquent,  $\Pi = \Pi_1$  et donc  $\Pi$  est supportée par  $\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}}$ . En suivant le même raisonnement en échangeant les rôles de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , on obtient que  $\Pi$  est supportée par  $\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}$ . Finalement,  $\Pi$  est une probabilité sur  $\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$  invariante par  $(P_t)$ , ce qui montre la partie "existence" de l'assertion principale.

En ce qui concerne l'unicité de la probabilité invariante sur  $\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$ , qui reste à démontrer, notons déjà qu'elle implique sur  $\Omega'$  que  $\mathcal{L} = \{\Pi\}$ , entraînant convergence énoncée dans le point 4(a). Le point clef pour démontrer ladite unicité réside dans le lemme suivant.

**Lemme 3.9.** *L'hypothèse  $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$  implique l'existence de  $i, i' \in \mathcal{E}$  et  $s \in ]0, 1[$  tels que le point d'équilibre unique sur  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}$  du champ moyen  $\bar{F} = sF_i + (1-s)F_{i'}$ , noté  $(\bar{x}, 0)$ , soit un point-selle. Si l'on note  $C_{\text{instable}}$  la courbe instable associée à cet équilibre<sup>36</sup>, alors  $C_{\text{instable}} \cap (\mathbb{R}_+)^2 \subseteq \Gamma$ , et de plus, tous les points de  $C_{\text{instable}} \cap (\mathbb{R}_+^*)^2$  dans un voisinage de  $(\bar{x}, 0)$  vérifient le critère faible d'Hörmander.*

**Démonstration.** Il s'agit de trouver  $\bar{x} \in ]x_{\min}, x_{\max}[$  tel que l'on puisse, en alternant convenablement les environnements, s'échapper du point  $(\bar{x}, 0)$  de façon transversale à l'axe des abscisses (pour  $y$  petit non nul). Ceci requiert, dans un premier temps, un environnement  $i \in \mathcal{E}$  qui puisse faire augmenter  $y$ , ou plutôt  $\log y$  (ce qui est équivalent mais qui est l'échelle correcte) au voisinage de  $(\bar{x}, 0)$ . Comme chaque environnement est favorable à l'espèce  $\mathbf{x}$ , cela implique de faire aussi augmenter  $x$ . Il nous faut donc un second environnement  $i' \in \mathcal{E}$  qui puisse :

- compenser cela immédiatement par une diminution d'égale amplitude de  $x$  ;
- ne pas trop diminuer  $\log y$  afin de préserver le bénéfice de la première étape.

Notons heuristiquement  $(\delta \log y)_i$  (resp.  $(\delta \log y)_{i'}$ ) et  $\delta x_i$  (resp.  $\delta x_{i'}$ ) les déplacements infinitésimaux correspondants dans l'environnement  $i$  (resp.  $i'$ ). En imposant  $\delta x_i = -\delta x_{i'}$ , quantité que l'on note  $|\delta x|$ , on a

$$(\delta \log y)_i + (\delta \log y)_{i'} = \left( \frac{H_{\mathbf{y}}(x, y, i)}{H_{\mathbf{x}}(x, y, i)} - \frac{H_{\mathbf{y}}(x, y, i')}{H_{\mathbf{x}}(x, y, i')} \right) \frac{|\delta x|}{x} + o(|\delta x|).$$

On souhaite que le terme d'ordre 1 soit strictement positif, pour  $(x, y)$  tendant vers  $(\bar{x}, 0)$ . Autrement dit notre raisonnement heuristique (auquel on donnera finalement un cachet rigoureux plus

36. Voir la proposition D.1 dans l'annexe D.



loin) nous donne pour mission de démontrer la proposition suivante :

$$\exists \bar{x} \in ]x_{min}, x_{max}[ , \quad \exists i, i' \in \mathcal{E}, \quad \begin{cases} H_{\mathbf{x}}(\bar{x}, 0, i) > 0, \\ H_{\mathbf{x}}(\bar{x}, 0, i') < 0, \\ \frac{H_{\mathbf{y}}(\bar{x}, 0, i)}{H_{\mathbf{x}}(\bar{x}, 0, i)} - \frac{H_{\mathbf{y}}(\bar{x}, 0, i')}{H_{\mathbf{x}}(\bar{x}, 0, i')} > 0. \end{cases} \quad (32)$$

Supposons par l'absurde  $\neg(32)$ . Soient  $x'_0 \in ]x_{min}, x_{max}[ \setminus \bigcup_{k \in \mathcal{E}} \{p_k\}$  et  $i_0 \in \mathcal{E}$  quelconque. Démarrons un processus  $(Z_t)$  en  $z_0 = (x'_0, 0, i_0)$ . On sait que presque sûrement  $\Pi_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \mu_{\mathbf{y}}$  pour la topologie étroite, d'où :

$$\frac{1}{t} \int_0^t H_{\mathbf{y}}(X_s, 0, I_s) ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \Lambda_{\mathbf{y}} > 0. \quad (33)$$

Nous savons que, presque sûrement,  $(X_t)$  s'approche de  $x_{min}$  et  $x_{max}$  pour des temps arbitrairement grands donc, par continuité, repasse par  $x'_0$  pour des temps arbitrairement grands. Comme  $x'_0$  n'est pas un point d'équilibre, ces instants de passage sont isolés. On peut donc découper l'histoire du processus au moyen des temps  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définis par  $\tau_0 = 0$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \tau_{n+1} = \inf\{t > \tau_n : X_t = x'_0\}.$$

Nous allons montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} H_{\mathbf{y}}(X_s, 0, I_s) ds \leq 0,$$

ce qui entrera en contradiction avec (33). Il suffit de considérer la première excursion entre les instants 0 et  $\tau_1$ , les autres cas étant identiques. Nous pouvons aussi supposer que  $\dot{X}_0 > 0$  pour fixer les idées. Notons  $x'_1 < \dots < x'_N$  les positions, remises dans l'ordre, au niveau desquelles il y a eu un switch environnemental, avant l'instant  $\tau_1$ . On peut subdiviser l'intervalle  $[0, \tau_1[$  en définissant  $\sigma_0 = 0$ ,  $\sigma_1 = \inf\{t > 0 : X_t \in \{x'_0, x'_1, \dots, x'_N\}\}$  puis :

$$\forall k \geq 1, \quad \sigma_{k+1} = \begin{cases} \inf\{t > \sigma_k : X_t \in \{x'_0, x'_1, \dots, x'_N\}\} & \text{si } F^{I_{\sigma_k}}(X_{\sigma_k}, 0) \neq 0, \\ \inf\{t > \sigma_k : I_t \neq I_{\sigma_k}\} & \text{si } F^{I_{\sigma_k}}(X_{\sigma_k}, 0) = 0. \end{cases}$$

Soit  $K \in \mathbb{N}^*$  l'unique entier tel que  $\sigma_K = \tau_1$ . Pour tout  $k \in \{0, \dots, K-1\}$ , l'environnement est constant sur l'intervalle  $t \in [\sigma_k, \sigma_{k+1}[$ , et plus précisément :

- (i) soit  $(X_t)$  parcourt un intervalle du type  $[x'_j, x'_{j+1}[$ , de gauche à droite ;
- (ii) soit  $(X_t)$  parcourt un intervalle du type  $]x'_j, x'_{j+1}]$ , de droite à gauche ;
- (iii) soit  $(X_t)$  reste constant.

Soit  $j \in \{0, \dots, N-1\}$  quelconque. Il y a autant de parcours de type (i) que de type (ii) au cours de l'excursion : on peut donc les apparier entre eux. Soit un parcours de type (i) ayant lieu sur un intervalle  $[s_a, t_a[$  sous l'environnement  $i_a$  et un parcours de type (ii) sur l'intervalle  $[s_b, t_b[$  sous l'environnement  $i_b$ . On a  $H_{\mathbf{x}}(x, 0, i_a) > 0$  pour tout  $x \in [x'_j, x'_{j+1}]$ , et

$$\int_{s_a}^{t_a} H_{\mathbf{y}}(X_s, 0, I_s) ds = \int_{x'_j}^{x'_{j+1}} \frac{H_{\mathbf{y}}(x, 0, i_a)}{H_{\mathbf{x}}(x, 0, i_a)} \frac{dx}{x},$$

par le changement de variable  $x = X_s$ . De même,  $H_{\mathbf{x}}(x, 0, i_b) < 0$  pour tout  $x \in [x'_j, x'_{j+1}]$ , et

$$\int_{s_b}^{t_b} H_{\mathbf{y}}(X_s, 0, I_s) ds = - \int_{x'_j}^{x'_{j+1}} \frac{H_{\mathbf{y}}(x, 0, i_b)}{H_{\mathbf{x}}(x, 0, i_b)} \frac{dx}{x}.$$

L'hypothèse  $\neg(32)$  implique :

$$\forall x \in [x'_j, x'_{j+1}], \quad \Delta(x, i_a, i_b) := \frac{H_{\mathbf{y}}(x, 0, i_a)}{H_{\mathbf{x}}(x, 0, i_a)} - \frac{H_{\mathbf{y}}(x, 0, i_b)}{H_{\mathbf{x}}(x, 0, i_b)} \leq 0,$$

et par conséquent :

$$\int_{[s_a, t_a] \cup [s_b, t_b]} H_{\mathbf{y}}(X_s, 0, I_s) ds = \int_{x'_j}^{x'_{j+1}} \Delta(x, i_a, i_b) dx \leq 0.$$

Ceci vaut pour chaque appariement effectué, ce qui nous laisse les parcours de type (iii) <sup>37</sup>. Pendant un tel parcours,  $Z_t$  est immobilisé en un point  $(x_c, 0, i_c)$  tel que  $F^{i_c}(x_c, 0) = 0$ , pour tout  $t \in [s_c, t_c]$ . Comme l'environnement  $i_c$  est favorable à l'espèce  $\mathbf{x}$  on a nécessairement  $H_{\mathbf{y}}(x_c, 0, i_c) < 0$ , et donc :

$$\int_{s_c}^{t_c} H_{\mathbf{y}}(X_s, 0, I_s) ds < 0.$$

On déduit de ce qui précède que

$$\int_0^{\tau_1} H_{\mathbf{y}}(X_s, 0, I_s) ds \leq 0,$$

ce qui entre en contradiction avec (33). Nous avons donc prouvé (32) par l'absurde.

Soient  $\bar{x}, i, i'$  fournis par (32). Soit  $s \in ]0, 1[$  l'unique solution de

$$sH_{\mathbf{x}}(\bar{x}, 0, i) + (1-s)H_{\mathbf{x}}(\bar{x}, 0, i') = 0 \tag{34}$$

et notons  $\bar{F} = sF^i + (1-s)F^{i'}$ . Ce champ moyen est associé à des taux de croissance qui vérifient les hypothèses du paragraphe 1.1.1, et (34) montre que  $(\bar{x}, 0)$  est son point d'équilibre unique sur  $M_0^{\mathbf{x}}$ . La différentielle du champ  $\bar{F}$  au point  $(\bar{x}, 0)$  a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} \bar{x}(s \partial_x H_{\mathbf{x}}(\bar{x}, 0, i) + (1-s) \partial_x H_{\mathbf{x}}(\bar{x}, 0, i')) & \star \\ 0 & s H_{\mathbf{y}}(\bar{x}, 0, i) + (1-s) H_{\mathbf{y}}(\bar{x}, 0, i') \end{pmatrix}.$$

Comme  $\partial_x H_{\mathbf{x}} < 0$ , le terme supérieur gauche est une valeur propre strictement négative de la différentielle <sup>38</sup> : notons la  $-\mu$ . Quant au terme inférieur droit, c'est une seconde valeur propre : notons-la  $\nu$ . Si l'on pose  $r = sH_{\mathbf{x}}(\bar{x}, 0, i) = -(1-s)H_{\mathbf{x}}(\bar{x}, 0, i')$ , on obtient :

$$\nu = \left( \frac{H_{\mathbf{y}}(\bar{x}, 0, i)}{H_{\mathbf{x}}(\bar{x}, 0, i)} - \frac{H_{\mathbf{y}}(\bar{x}, 0, i')}{H_{\mathbf{x}}(\bar{x}, 0, i')} \right) r > 0.$$

D'après le théorème D.1, avec les notations associées, l'ensemble  $C_{instable} := W_{instable}^{\bar{F}}(\bar{x}, 0)$  est une courbe lisse, dont la tangente en  $(\bar{x}, 0)$  est dirigée par la direction propre associée à  $\nu$ . De plus

37. Nous les traitons bien qu'ils soient en réalité de probabilité 0.

38. On retrouve simplement le fait que  $(\bar{x}, 0)$  est stable dans la direction de l'axe des abscisses.

si  $p$  est un point quelconque dans  $C_{instable} \cap (\mathbb{R}_+^*)^2$ , alors en notant  $\bar{\Phi}$  le flot du champ  $\bar{F}$ , on a :

$$C_{instable} \cap (\mathbb{R}_+^*)^2 = \{\bar{\Phi}_t(p), t \in \mathbb{R}\}. \quad (35)$$

Notons  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  la base canonique du plan et  $\vec{u} = (u_x, u_y)$  l'unique vecteur propre unitaire associé à  $\nu$  tel que  $u_y > 0$ . On désignera par  $(x', y')$  le système de coordonnées associé au repère d'origine  $(\bar{x}, 0)$  et de base  $(\vec{e}_x, \vec{u})$ . D'après le théorème D.1, si l'on prend  $\delta > 0$  suffisamment petit alors pour  $|x'|, |y'| \leq \delta$  le schéma de la dynamique locale associée au champ  $\bar{F}$  est celui représenté en figure 4. On y a mis en évidence le parallélogramme  $\diamond_\delta$  constitué des points de coordonnées  $-\delta \leq x' \leq \delta, 0 \leq y' \leq \delta$ , et l'allure locale des courbes  $C_{instable}$  et  $C_{stable} := W_{stable}^{\bar{F}}(\bar{x}, 0)$ . Le point  $E_\delta$  (resp.  $S_\delta$ ) est l'intersection de l'arête gauche (resp. supérieure) avec  $C_{stable}$  (resp.  $C_{instable}$ ). Notons les points suivants :

- le champ est entrant sur les arêtes latérales du parallélogramme  $\diamond_\delta$ , et sortant sur l'arête supérieure ;
- les courbes intégrales entrant dans  $\diamond_\delta$  par son arête gauche en un point  $E \neq E_\delta$  sont exactement celles qui en sortent par l'arête supérieure, en un point  $S$  strictement à gauche du point  $S_\delta$  ;
- idem en remplaçant "gauche" par "droite" dans le point précédent (non représenté sur la figure).

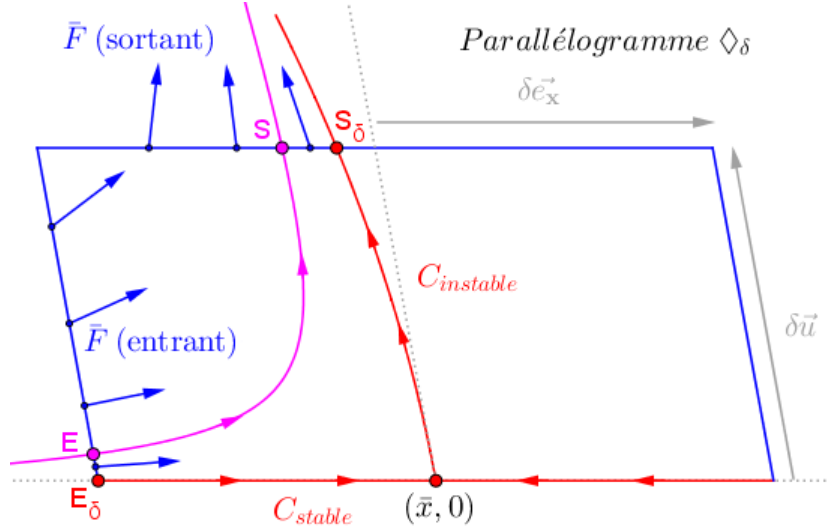


FIGURE 4 – Dynamique associée au champ  $\bar{F}$  au voisinage du point-selle  $(\bar{x}, 0)$ .

Remarquons que le point  $S_\delta$  conduit, en suivant la trajectoire  $\eta \in \mathcal{S}_{S_\delta}$  solution de  $\dot{\eta} = \bar{F}(\eta)$ , à l'ensemble de tous les points de  $C_{instable}$  qui sont à l'extérieur de  $\diamond_\delta$ . Quant aux points intérieurs, ce sont les  $S_{\delta'}$  avec  $\delta' < \delta$ . Comme on sait déjà par-ailleurs que  $(\bar{x}, 0) \in \Gamma$ , on voit qu'il suffit de montrer que  $S_\delta \in \Gamma$  pour que  $C_{instable} \subseteq \Gamma$ .

Montrons que  $S_\delta \in \Gamma$ . Pour cela ocommençons par fixer  $\varepsilon > 0$ . Choisissons un point  $S$  de l'arête supérieure du parallélogramme  $\diamond_\delta$ , strictement à gauche de  $S_\delta$  et à une distance inférieure ou égale à  $\varepsilon$  de celui-ci. Notons  $E$  le point d'entrée sur l'arête gauche de la courbe intégrale sortant en  $S$ . Comme les courbes intégrales ne peuvent se croiser, toute courbe issue d'un point  $E' \in ]E, E_\delta[$  doit ressortir par un point  $S' \in ]S, S_\delta[$ , qui appartient donc à la boule ouverte  $B_\varepsilon(S_\delta)$ . Il suffit donc de montrer que l'on peut atteindre  $]E, E_\delta[$  en partant de tout point  $(x_0, y_0) \in M \setminus M_0$  au moyen des champs  $F^i, i \in \mathcal{E}$ . Le champ  $F^{i_{min}}$  permet de s'approcher arbitrairement proche de  $(x_{min}, 0)$ . Le

champ  $F^{i_{max}}$  permet quant à lui de se rendre de  $(x_{min}, 0)$  à  $(x_{max}, 0)$ , en passant par le point  $E_\delta$ . On en déduit qu'il existe  $T > 0$  tel que  $\Phi_{-T}^{i_{max}}(\bar{x} - \delta, 0) = (x_{min}, 0)$ . Soit la fonction  $\psi$  définie au voisinage de  $(0, 0)$  par :

$$\psi(t, y') = \Phi_{-T+t}^{i_{max}}((\bar{x}, 0) + y'\vec{u}).$$

On a  $\partial_t \psi(0, 0) = F^{i_{max}}(x_{min}, 0)$ , non nul et parallèle à  $\vec{e}_x$ , et  $\partial_{y'} \psi(0, 0) = D\Phi_{-T}^{i_{max}}(\bar{x}, 0) \cdot \vec{u}$ . Etant donné que  $\Phi_{-T}$  est un difféomorphisme, ce vecteur est non nul, et forme une base avec  $D\Phi_{-T}^{i_{max}}(\bar{x}, 0) \cdot \vec{e}_x$ , qui est parallèle à  $\vec{e}_x$  étant donné que  $\Phi^{i_{max}}$  laisse invariant l'axe des abscisses. On voit donc que  $\psi$  est un difféomorphisme local en  $(0, 0)$ . Par conséquent, il existe  $\Delta t > 0$ ,  $\Delta y' > 0$  tels que  $\psi([-\Delta t, \Delta t] \times ]-\Delta y', \Delta y'[)$  soit un ouvert  $\mathcal{V}$  contenant  $(x_{min}, 0)$ , et quitte à choisir on peut supposer  $\Delta t < T$  et  $\Delta y' < \|\vec{EE}_\delta\|$ .

Les ingrédients sont maintenant en place. Si  $(x_0, y_0)$  est un point initial quelconque dans  $M \setminus M_0$ , alors en suivant  $F^{i_{min}}$  on finit par tomber dans  $\mathcal{V}$ , disons en  $(x_1, y_1)$ . Alors il existe  $(t, y')$  dans  $]-\Delta t, \Delta t[ \times ]-\Delta y', \Delta y'[$  tel que  $(x_1, y_1) = \psi(t, y')$ , autrement dit,  $\Phi_{T-t}^{i_{max}}(x_1, y_1) = E_\delta + y'\vec{u}$ . On a nécessairement  $y' > 0$  et donc  $\Phi_{T-t}^{i_{max}}(x_1, y_1) \in ]E, E_\delta[$ . Cela conclut la preuve du fait que  $S_\delta \in \Gamma$  et donc  $C_{instable} \subseteq \Gamma$ .

Afin de conclure la démonstration du lemme, rappelons-nous que

$$\frac{H_{\mathbf{y}}(\bar{x}, 0, i)}{H_{\mathbf{x}}(\bar{x}, 0, i)} - \frac{H_{\mathbf{y}}(\bar{x}, 0, i')}{H_{\mathbf{x}}(\bar{x}, 0, i')} > 0,$$

et donc pour  $(x^*, y^*) \in C_{instable} \cap (\mathbb{R}_+^*)^2$  choisi dans un voisinage de  $(\bar{x}, 0)$ , on aura :

$$\det \left( F^i(x^*, y^*), F^{i'}(x^*, y^*) \right) = x^* y^* \begin{vmatrix} H_{\mathbf{x}}(x^*, y^*, i) & H_{\mathbf{x}}(x^*, y^*, i') \\ H_{\mathbf{y}}(x^*, y^*, i) & H_{\mathbf{y}}(x^*, y^*, i') \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ceci implique le critère faible d'Hörmander en  $(x^*, y^*)$ . □

Soit  $p^* \in C_{instable} \subseteq \Gamma$  vérifiant le critère faible d'Hörmander. On peut appliquer le théorème A.20 avec  $D = M \setminus M_0$ , d'où l'unicité de la loi invariante par  $(P_t)$  sur  $\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$ , ainsi que son absolue continuité par rapport à la mesure de Lebesgue  $\ell_{\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0} = \ell_{\mathbf{M}}$  (point 1).

Passons au point 3. D'après la proposition 2.12, il existe une unique loi  $\tilde{\Pi} \in \tilde{\mathcal{P}}_{inv}(\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0)$ , et on a  $\text{supp}(\tilde{\Pi}) = \text{supp}(\Pi)$ . Dans la suite on se donne  $(p, i) \in \mathbf{M}$ , et  $\mathcal{O}$  un ouvert contenant  $p$ . Si l'on suppose  $p \in \Gamma$ , alors  $\mathcal{O} \times \{i\}$  est accessible pour la chaîne  $(\tilde{Z}_n)$  restreinte à  $\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$ . La propriété A.3 entraîne alors que  $\tilde{\Pi}(\mathcal{O} \times \{i\}) > 0$ . Dans ce cas  $(p, i)$  appartient à  $\text{supp}(\tilde{\Pi}) = \text{supp}(\Pi)$ . Réciproquement, si l'on suppose  $(p, i) \in \text{supp}(\Pi)$ , alors en démarrant un processus  $(Z_t)$  en un point  $(q, j) \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$  quelconque, on aura presque sûrement :

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \Pi_t(\mathcal{O} \times \{i\}) \geq \Pi(\mathcal{O} \times \{i\}) > 0.$$

Cela implique qu'il existe  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}$  et  $s \in \mathbb{R}_+$  tels que  $\eta_{q, \mathbf{i}, \mathbf{u}}(s) \in \mathcal{O}$ , sans quoi  $\Pi_t(\mathcal{O} \times \{i\})$  serait nul pour tout  $t$ . D'après la définition-proposition 2.5,  $p$  est donc accessible depuis tout point  $q \in M \setminus M_0$ , i.e.  $p \in \Gamma$ . Ainsi, nous avons démontré que  $\text{supp}(\Pi) = \Gamma \times E$ . Montrons maintenant que  $\tilde{\Gamma} \neq \emptyset$ . Le théorème A.19, appliqué à  $D = M \setminus M_0$  et  $p^*$ , nous fournit un ouvert non vide  $\tilde{\mathcal{W}}$  de  $M \setminus M_0$ , un entier  $m$  et une constante  $c > 0$  tels que :

$$\forall j \in \mathcal{E}, \quad \mathbb{P}_{p^*, j}[\tilde{Z}_m \in \cdot] \geq c \ell_{\mathbf{M}}(\cdot \cap \tilde{\mathcal{W}} \times \mathcal{E}). \quad (36)$$

Supposons donc que  $p \in \tilde{\mathcal{W}}$ . Dans ce cas, quel que soit  $j \in \mathcal{E}$ , on a :

$$\mathbb{P}_{p^*, j}((\tilde{X}_m, \tilde{Y}_m) \in \mathcal{O}) \geq c \ell_{\mathbf{M}}((\mathcal{O} \cap \tilde{\mathcal{W}}) \times \mathcal{E}) > 0.$$

Cela montre que  $p$  est accessible à partir de  $p^* \in \Gamma$ , et donc que  $p \in \Gamma$ . Ainsi,  $\mathring{\Gamma} \supseteq \tilde{\mathcal{W}}$ .

Considérons le point 4(b). Comme  $\Gamma \times \mathcal{E} = \text{supp}(\Pi)$ , on a presque sûrement pour tout point de départ  $z \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$  :

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \Pi_t(\mathring{\Gamma} \times \mathcal{E}) \geq \Pi(\mathring{\Gamma} \times \mathcal{E}) > 0,$$

donc presque sûrement  $(X_t, Y_t)$  pénètre dans  $\Gamma$ . Comme  $\Gamma$  est positivement invariant par les trajectoires de  $(X_t, Y_t)$ , cela implique que presque sûrement l'ensemble  $\omega$ -limite de  $(X_t, Y_t)$  est inclus dans  $\Gamma$ . Réciproquement, avec probabilité 1, pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  intersectant  $\Gamma$  :

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \Pi_t(\mathcal{O} \times \mathcal{E}) \geq \Pi(\mathcal{O} \times \mathcal{E}) > 0.$$

Ceci implique pour tout  $p \in \Gamma$  la récurrence de tous les voisinages de  $p$  pour la trajectoire  $(X_t, Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Autrement dit, avec probabilité 1,  $\Gamma$  est inclus dans l'ensemble  $\omega$ -limite de  $(X_t, Y_t)$ .

Démontrons le point 2. En nous servant de la proposition 3.2, on peut obtenir  $T > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\theta > 0$  et  $0 < \rho < 1$  tels que

$$\forall z = (x, y, i) \in \mathbf{M}, \quad \begin{cases} 0 < x < \varepsilon \Rightarrow \mathbb{E}_z \left( \frac{1}{X_T^\theta} \right) \leq \rho \frac{1}{x^\theta}, \\ 0 < y < \varepsilon \Rightarrow \mathbb{E}_z \left( \frac{1}{Y_T^\theta} \right) \leq \rho \frac{1}{y^\theta}. \end{cases}$$

Notons  $W : \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction définie par  $W(x, y, i) = \frac{1}{x^\theta} + \frac{1}{y^\theta}$ . Pour toute condition initiale  $z = (x, y, i) \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$  du processus  $(Z_t)$ , on a :

$$\log(X_T) = \log(x) + \int_0^T H_{\mathbf{x}}(Z_s) ds,$$

et donc  $\log(X_T) \geq \log(x) - T \|H_{\mathbf{x}}\|_{\infty, \mathbf{M}}$ . On en déduit que :

$$x \geq \varepsilon \Rightarrow \mathbb{E}_z \left( \frac{1}{X_T^\theta} \right) \leq \frac{e^{\theta T \|H_{\mathbf{x}}\|_{\infty, \mathbf{M}}}}{\varepsilon^\theta}.$$

Par conséquent en posant  $K_1 = e^{\theta T \|H_{\mathbf{x}}\|_{\infty, \mathbf{M}}} / \varepsilon^\theta$ , on a de façon générale :

$$\mathbb{E}_z \left( \frac{1}{X_T^\theta} \right) \leq \rho \frac{1}{x^\theta} + K_1.$$

Après avoir effectué le même raisonnement sur la coordonnée  $y$ , on obtient l'existence d'une constante  $K > 0$  telle que la condition de drift géométrique suivante soit vérifiée sur  $\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$  :

$$P_T W \leq \rho W + K.$$

En appliquant le noyau  $P_T$  de façon répétée, on obtient, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_{nT} W \leq \rho^n W + K \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k$ , d'où, en posant  $\tilde{K} = K/(1 - \rho)$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{nT} W \leq \rho^n W + \tilde{K}. \quad (37)$$

Si on se donne un réel  $L > 0$ , alors la concavité de la fonction  $x \mapsto x \wedge L$  sur  $\mathbb{R}$  implique, par l'inégalité de Jensen :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{nT}(W \wedge L) \leq (P_{nT}W) \wedge L \leq (\rho^n W + \tilde{K}) \wedge L.$$

En intégrant contre la mesure invariante  $\Pi$ , on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Pi(W \wedge L) \leq \Pi((\rho^n W + \tilde{K}) \wedge L).$$

Par convergence dominée lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient  $\Pi(W \wedge L) \leq \Pi(\tilde{K} \wedge L) \leq \tilde{K}$ . Le point 2 est alors obtenu par convergence monotone quand  $L \rightarrow +\infty$ .

Pour finir, nous devons démontrer le point 5. Supposons qu'il existe un point  $p^* \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$  accessible et vérifiant le critère **fort** d'Hörmander. On peut alors appliquer la proposition A.21 avec  $D = M \setminus M_0$ , fournissant un ouvert non vide  $\mathcal{W}$  de  $M \setminus M_0$ , tel que pour tout compact  $\mathcal{K} \subseteq D$ , on puisse trouver  $c_{\mathcal{K}}, t_{\mathcal{K}}, r_{\mathcal{K}} > 0$  vérifiant :

$$\forall z \in \mathcal{K} \times \mathcal{E}, \forall t \in [t_{\mathcal{K}}, t_{\mathcal{K}} + r_{\mathcal{K}}], \quad P_t(z, \cdot) \geq c_{\mathcal{K}} \ell_{\mathbf{M}}(\cdot \cap \mathcal{W} \times \mathcal{E}). \quad (38)$$

Choisissons  $R > 2\tilde{K}/(1-\rho)$  et notons  $\mathcal{K} = \{(x, y) \in M \setminus M_0 : 1/x^\theta + 1/y^\theta \leq R\}$ . Il s'agit d'un compact et quitte à augmenter  $R$ , on peut supposer  $\ell_{\mathbf{M}}((\mathcal{K} \cap \mathcal{W}) \times \mathcal{E}) > 0$ . En notant  $\nu_0 = \ell_{\mathbf{M}}(\cdot \cap \mathcal{W} \times \mathcal{E})$  et en appliquant de façon répétée (38), on obtient :

$$\forall z \in \mathcal{K}, \forall t \in [t_{\mathcal{K}}, t_{\mathcal{K}} + r_{\mathcal{K}}], \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad P_{mt}(z, \cdot) \geq (c_{\mathcal{K}} \nu_0(\mathcal{K}))^{m-1} c_{\mathcal{K}} \nu_0(\cdot).$$

Choisissons  $s \in [t_{\mathcal{K}}, t_{\mathcal{K}} + r_{\mathcal{K}}]$  tel que  $s/T$  soit rationnel. Soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$  tels que  $s/T = n/m$  et notons  $\mathcal{P} = P_{ms} = P_{nT}$ , ainsi que  $c' = (c_{\mathcal{K}} \nu_0(\mathcal{K}))^{m-1} c_{\mathcal{K}} > 0$ . Alors  $\mathcal{P}$ , vu comme noyau markovien sur  $\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$ , vérifie :

- (i)  $\mathcal{P}W \leq \rho^n W + \tilde{K}$ ;
- (ii)  $\forall z \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0, \quad W(z) \leq R \Rightarrow \mathcal{P}(z, \cdot) \geq c' \nu_0(\cdot)$ .

Etant donné que  $R > 2\tilde{K}/(1-\rho) > 2\tilde{K}/(1-\rho^n)$ , nous pouvons appliquer le théorème ergodique de Harris (voir l'annexe D). L'unique probabilité invariante de  $\mathcal{P}$  n'est autre que  $\Pi$ , donc nous obtenons l'existence de  $C > 0$  et  $0 < \gamma < 1$  tels que, pour toute fonction mesurable bornée  $f : \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  et tous  $z \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0, k \in \mathbb{N}$  :

$$|\mathcal{P}^k f(z) - \Pi f| \leq C \gamma^k (1 + W(z)) \|f - \Pi f\|_{\infty}.$$

Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ . Il existe  $k \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq r < nT$  uniques tels que  $t = k(nT) + r$ . On a alors, pour tout  $z \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$  et toute fonction  $f : \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée :

$$|P_t f(z) - \Pi(f)| = |\mathcal{P}^k(P_r f)(z) - \Pi(P_r f)| \leq C \gamma^k (1 + W(z)) 2 \|f\|_{\infty}.$$

Or,  $\gamma^k \leq \gamma^{t/nT-1}$ , ce qui nous donne (28) quitte à modifier  $C$  et à poser  $\alpha = -\log(\gamma)/nT$ . ■

Nous achevons notre catalogue des dynamiques possibles avec le cas hybride **e**, qui donne un autre jeu d'hypothèses pour lequel la persistance est possible (page suivante).

**Théorème 3.10** (Persistance potentielle). *Supposons  $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$ ,  $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ , et  $\Gamma \cap M_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$ , alors :*

1. *L'ensemble  $\Xi := \{p \in M : \text{Acc}(p) \cap M_0^{\mathbf{x}} = \emptyset\}$  est un compact contenant  $\Gamma$ , disjoint de  $M_0^{\mathbf{x}}$ , et positivement invariant par les flots  $\Phi^i$ ,  $i \in \mathcal{E}$ .*

2. *Il existe une unique loi  $\Pi \in \mathcal{P}_{\text{inv}}(\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0)$ , et de plus :*

(a) *La loi  $\Pi$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\ell_{\mathbf{M}}$ .*

(b) *Il existe  $\theta > 0$  tel que*

$$\int_{\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0} \Pi(dx, dy, di) \frac{1}{y^\theta} < \infty.$$

(c) *Le support de  $\Pi$  est  $\Gamma \times \mathcal{E}$ , et  $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$ .*

3. *Si  $Z_0 = z_0 \in (\Xi \times \mathcal{E}) \setminus \mathbf{M}_0$ , alors l'événement Pers défini par les deux points suivants est réalisé avec probabilité 1 :*

(a)  $\Pi_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \Pi$  *étroitement ;*

(b) *L'ensemble  $\omega$ -limite de  $(X_t, Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est  $\Gamma$ .*

4. *S'il existe un point  $p^* \in \Gamma \setminus M_0$  vérifiant la condition forte d'Hörmander, alors on peut trouver  $C, \alpha > 0$  tels que, pour toute condition initiale  $z = (x, y, i) \in (\Xi \times \mathcal{E}) \setminus \mathbf{M}_0$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :*

$$\|\mathbb{P}_z(Z_t \in \cdot) - \Pi\|_{VT} \leq C \left(1 + \frac{1}{y^\theta}\right) e^{-\alpha t}. \quad (39)$$

5. *Si  $(p, i) \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$  avec  $p \notin \Xi$ , alors :*

(a)  $\mathbb{P}_{p,i}(\text{Pers} \cup \text{Ext}_{\mathbf{x}}) = 1$ ,  $\mathbb{P}_{p,i}(\text{Ext}_{\mathbf{x}}) > 0$ , et  $\mathbb{P}_{p,i}(\text{Pers}) > 0$  ;

(b)  $\mathbb{P}_{p,i}(Z_t \in \cdot | \text{Ext}_{\mathbf{x}}) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \mu_{\mathbf{x}}$  *en loi ;*

(c) *si l'hypothèse du point 4 est vérifiée, alors  $\|\mathbb{P}_{p,i}(Z_t \in \cdot | \text{Pers}) - \Pi\|_{VT} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ .*

**Démonstration.** Commençons par le point 1. Le fait que  $\Xi$  soit disjoint de  $M_0^{\mathbf{x}}$  est une conséquence de la proposition 2.10. L'ensemble  $\Xi$  contient  $\Gamma$  par hypothèse, étant donné que  $\Gamma = \text{Acc}(p)$  pour tout  $p \in \Gamma$ . L'invariance positive de  $\Xi$  par les flots est quant à elle une conséquence de la transitivité de la relation d'accessibilité. Enfin, de façon similaire à la preuve du théorème 3.3 mais en échangeant le rôle de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , si l'on se fixe  $0 < \alpha_{\mathbf{x}} < -\Lambda_{\mathbf{x}}$ , alors on peut trouver  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$\forall z \in \mathbf{M}_{[0, \varepsilon/2]}^{\mathbf{x}}, \quad \mathbb{P}_z \left( \limsup_{t \rightarrow +\infty} \log(X_t)/t \leq -\alpha_{\mathbf{x}} \right) > 0.$$

Ceci implique nécessairement que pour tout  $(q, i) \in \mathbf{M}_{[0, \varepsilon/2]}^{\mathbf{x}}$ , il existe une trajectoire  $\eta \in \mathcal{S}_q$  telle que  $\eta_x(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Cette trajectoire à valeurs dans le compact  $M$  possède au moins une valeur d'adhérence, qui appartient à  $M_0^{\mathbf{x}}$ , ainsi qu'à  $\text{Acc}(q)$  d'après la caractérisation faite dans la définition-proposition 2.5. Or pour tout  $r \in M_0^{\mathbf{x}}$ ,  $\text{Acc}(r) \supseteq (\{0\} \times [y_{\min}, y_{\max}])$ . Par transitivité de la relation d'accessibilité, on a donc :

$$\forall q \in M_{[0, \varepsilon/2]}^{\mathbf{x}}, \quad \text{Acc}(q) \supseteq (\{0\} \times [y_{\min}, y_{\max}]).$$

D'après la proposition 2.10, pour tout  $p \in M$ , on a  $p \notin \Xi \Leftrightarrow \text{Acc}(p) \supseteq (\{0\} \times [y_{\min}, y_{\max}])$ . Il n'est alors pas difficile de voir que

$$M \setminus \Xi = M \cap \left( \bigcup_{(i, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}} (\Phi_{\mathbf{u}}^i)^{-1}(M_{[0, \varepsilon/2]}^{\mathbf{x}}) \right).$$

Comme les applications  $\Phi_u^i$  sont continues et que  $M_{[0,\varepsilon/2]}^{\mathbf{x}}$  est un ouvert de  $M$ , l'ensemble  $M \setminus \Xi$  est un ouvert de  $M$ . Par conséquent  $\Xi$  est compact, ce qui clôt le point 1.

Le lemme 3.9 entraîne l'existence d'un point  $p^* \in \Gamma \setminus M_0$  vérifiant le critère faible d'Hörmander. D'après le théorème A.20 appliqué à  $D = M \setminus M_0$ , il y a donc unicité d'une éventuelle loi invariante par  $(P_t)$  sur  $\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$ , et si celle-ci existe, elle est absolument continue par rapport à  $\ell_{\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0} = \ell_{\mathbf{M}}$ . Pour obtenir l'existence, et les points 2(c) et 3, il suffit de reprendre les arguments de la démonstration du théorème 3.8, en remplaçant  $M$  par  $\Xi$ , ce qui est permis par sa compacité et sa positive invariance par les flots. Ensuite, la proposition 3.2 montre l'existence de  $T > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\theta > 0$  et  $0 < \rho < 1$  tels que

$$\forall z = (x, y, i) \in \mathbf{M}, \quad 0 < y \leq \varepsilon \Rightarrow \mathbb{E}_z \left( \frac{1}{Y_T^\theta} \right) \leq \rho \frac{1}{y^\theta}.$$

En notant  $W : (\Xi \times \mathcal{E}) \setminus \mathbf{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction définie par  $W(x, y, i) = 1/y^\theta$ , et en reprenant là aussi la preuve du théorème 3.8 en remplaçant  $M$  par  $\Xi$ , on démontre les points 2(b) et 4.

Passons au point 5. Etant donné que  $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ , le lemme 3.7 implique que l'on peut choisir  $h_1 > 0$  suffisamment petit de sorte qu'il existe  $c_1 > 0$  tel que :

$$\forall z \in \mathbf{M}_{[0,h_1]}^{\mathbf{x}}, \quad \mathbb{P}_z(\text{Ext}_{\mathbf{x}}) \geq c_1. \quad (40)$$

Soit  $(p, i) \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$  tel que  $p \notin \Xi$  : on a donc  $\text{Acc}(p) \supseteq (\{0\} \times [y_{\min}, y_{\max}])$ . Ceci entraîne que  $\mathbb{P}_{p,i}(\sigma_{h_1}^{\mathbf{x}, \text{In}} < +\infty) > 0$  d'après la définition-proposition 2.5. En combinant ces résultats au moyen de la propriété forte de Markov en  $\sigma_{h_1}^{\mathbf{x}, \text{In}}$ , on a en raison de l'invariance par translation temporelle de  $\text{Ext}_{\mathbf{x}}$  :  $\mathbb{P}_{p,i}(\text{Ext}_{\mathbf{x}}) > 0$ . De même,  $\text{Acc}(p) \supseteq \dot{\Gamma}$  et donc si l'on note

$$\sigma = \inf \{t > 0 : Z_t \in (\Xi \times \mathcal{E}) \setminus \mathbf{M}_0\} \leq \inf \{t > 0 : Z_t \in \dot{\Gamma} \times \mathcal{E}\},$$

on a  $\mathbb{P}_{p,i}(\sigma < +\infty) > 0$ . En conséquence du point 3, l'événement Pers est presque sûr sur  $\{\sigma < +\infty\}$ , ce qui prouve  $\mathbb{P}_{p,i}(\text{Pers}) > 0$ . Ensuite, l'hypothèse  $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$  implique<sup>39</sup> l'existence de  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall z \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}, \quad \mathbb{P}_z(\sigma_\varepsilon^{\mathbf{y}, \text{Out}} < +\infty) = 1. \quad (41)$$

De plus, on peut appliquer le lemme 3.4 avec  $\mathcal{K} = M \setminus (M_{[0,h_1]}^{\mathbf{x}} \cup M_{[0,\varepsilon]}^{\mathbf{y}})$  et  $U = \dot{\Gamma}$ . Comme  $\dot{\Gamma} \subseteq \Xi \setminus M_0$  et que Pers est presque sûr sur  $\{\sigma < +\infty\}$ , ce lemme nous fournit une constante  $c > 0$  telle que

$$\forall z \in \mathbf{M} \setminus (\mathbf{M}_{[0,h_1]}^{\mathbf{x}} \cup \mathbf{M}_{[0,\varepsilon]}^{\mathbf{y}}), \quad \mathbb{P}_z(\text{Pers}) \geq c. \quad (42)$$

En combinant (41), (40) et (42) au moyen de la propriété de Markov au temps d'arrêt  $\sigma_\varepsilon^{\mathbf{y}, \text{Out}}$ , on obtient :

$$\forall z \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0, \quad \mathbb{P}_z(\text{Ext}_{\mathbf{x}} \cup \text{Pers}) \geq c \wedge c_1.$$

De même que dans la preuve des théorèmes 3.3 et 3.6, un argument de martingale entraîne alors que pour tout  $z \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$ , on a  $\mathbb{P}_z(\text{Ext}_{\mathbf{x}} \cup \text{Ext}_{\mathbf{y}}) = 1$ , ce qui clôt le point 5(a).

Le point 5(b) se démontre de la même manière que dans la preuve du théorème 3.6.

Enfin, démontrons le point 5(c). On suppose qu'il existe un point  $p^* \in \Gamma \setminus M_0$  vérifiant la condition forte d'Hörmander, de sorte que la majoration (39) est vérifiée. Remarquons que l'ensemble  $\Xi \times \mathcal{E}$  est absorbant, et que presque sûrement sur l'événement Pers, le processus  $(Z_t)$  finit par y entrer. Par conséquent, si l'on se fixe  $\delta > 0$ , il existe  $t_1 \geq 0$  tel que

$$\mathbb{P}_{p,i}(Z_{t_1} \in \Xi \times \mathcal{E}) \geq 1 - \delta. \quad (43)$$

---

39. Voir la propriété (17) dans la preuve du théorème 3.3, avec les rôles des espèces inversés.



Pour tout  $t \geq t_1$  et toute fonction  $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée, on a :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_{p,i}[f(Z_t) - \Pi f \mid \text{Pers}]| &\leq \left| \mathbb{E}_{p,i}[\mathbf{1}_{Z_{t_1} \in \Xi \times \mathcal{E}}(f(Z_t) - \Pi f) \mid \text{Pers}] \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E}_{p,i}[\mathbf{1}_{Z_{t_1} \notin \Xi \times \mathcal{E}}(f(Z_t) - \Pi f) \mid \text{Pers}] \right| \\ &\leq \frac{1}{\mathbb{P}_{p,i}(\text{Pers})} \left| \mathbb{E}_{p,i}[\mathbf{1}_{Z_{t_1} \in \Xi \times \mathcal{E}}(f(Z_t) - \Pi f)] \right| + 2\|f\|_\infty \delta, \end{aligned}$$

en utilisant l'implication presque sûre ( $Z_{t_1} \in \Xi \times \mathcal{E} \Rightarrow \text{Pers}$ ), et l'inégalité (43). La propriété de Markov puis la majoration (39) entraînent ensuite :

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}_{p,i}[\mathbf{1}_{Z_{t_1} \in \Xi \times \mathcal{E}}(f(Z_t) - \Pi f)] \right| &= \left| \mathbb{E}_{p,i}[\mathbf{1}_{Z_{t_1} \in \Xi \times \mathcal{E}}(P_{t-t_1}f(Z_{t_1}) - \Pi f)] \right| \\ &\leq \mathbb{E}_{p,i} \left[ C \left( 1 + \frac{1}{Y_{t_1}^\theta} \right) e^{-\lambda(t-t_1)} \|f\|_\infty \right] \end{aligned}$$

Or, si l'on note  $(x, y)$  les coordonnées de la condition initiale  $p$ , on a

$$\frac{1}{Y_{t_1}^\theta} \leq \frac{e^{\theta t_1 \|H_Y\|_\infty}}{y^\theta} =: C_p,$$

d'où :

$$\forall t \geq t_1, \quad |\mathbb{E}_{p,i}[f(Z_t) - \Pi f \mid \text{Pers}]| \leq \left( \frac{C(1 + C_p)}{\mathbb{P}_{p,i}(\text{Pers})} e^{-\lambda(t-t_1)} + 2\delta \right) \|f\|_\infty.$$

Pour tout  $t \geq t_1 + (1/\lambda) \log_+ \left( \delta C(1 + C_p) / \mathbb{P}_{p,i}(\text{Pers}) \right)$ , on a donc

$$\|\mathbb{P}_{p,i}(Z_t \in \cdot \mid \text{Pers}) - \Pi\|_{VT} \leq 3\delta.$$

Ceci conclut le point 5(c). ■

## 4 Persistance : topologie de $\Gamma$

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la topologie de l'ensemble  $\Gamma$  des points accessibles **dans l'hypothèse où  $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$** . Dans le cadre des théorèmes 3.8 et 3.10, cela revient en effet à tenter de comprendre l'asymptotique de la trajectoire  $(X_t, Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  lorsqu'il y a persistance des espèces.

*Remarque.* En réalité,  $\Gamma$  dépend uniquement des champs et pas des taux de saut. Etant donné une famille de champs défavorables à  $\mathbf{y}$ , on peut réaliser  $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$  si et seulement s'il existe  $i, i' \in \mathcal{E}$  et  $s \in ]0, 1[$  tels que le taux de croissance  $\bar{H}_{\mathbf{y}}$  et l'équilibre  $(\bar{x}, 0)$  associés au champ  $\bar{F} = sF^i + (1-s)F^{i'}$  vérifient  $\bar{H}_{\mathbf{y}}(\bar{x}, 0) > 0$ . Le sens direct est donné par le lemme 3.9 ; le sens inverse, quant à lui, est une conséquence de la proposition 1.12. En effet, avec les notations de cette proposition, on a  $\Lambda_{\mathbf{y}}^u := \mu_{\mathbf{y}}^u(H_{\mathbf{y}}) \rightarrow \bar{H}_{\mathbf{y}}(\bar{x}, 0)$  quand  $u \rightarrow +\infty$ .

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au système dynamique à valeurs ensemblistes donné par l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+)^2 &\rightarrow \mathcal{P}((\mathbb{R}_+)^2) \\ (t, x) &\mapsto \Psi_t(p) = \{ \eta(t), \eta \text{ solution de (ID) sur } [0, t], \eta(0) = p \}. \end{aligned}$$

C'est le système dynamique engendré par l'inclusion différentielle (ID). On notera naturellement

$\Psi_J(B) = \Psi(J \times B)$  pour toutes parties  $J \subseteq \mathbb{R}$  et  $B \subseteq (\mathbb{R}_+)^2$ . On vérifie sans problème les propriétés suivantes pour tous  $x, y \in (\mathbb{R}_+)^2$  :

- (a)  $\Psi_0(x) = \{x\}$  ;
- (b)  $\forall t, s \in \mathbb{R}_+, \Psi_{t+s}(x) = \Psi_t(\Psi_s(x))$  ;
- (c)  $y \in \Psi_t(x) \Rightarrow x \in \Psi_{-t}(y)$ .

**Définition 4.1.** Un ensemble  $B \subseteq (\mathbb{R}_+)^2$  est dit

- **fortement positivement invariant** sous  $\Psi$  si pour tout  $t \in \mathbb{R}_+, \Psi_t(B) \subseteq B$  ;
- **invariant** sous  $\Psi$  si pour tout  $p \in B$  il existe une solution  $\eta$  de (ID) définie sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant  $\eta(0) = p$  telle que  $\eta(\mathbb{R}) \subseteq B$  ;

Remarque. Si  $B$  est invariant sous  $\Psi$ , alors pour tout  $t \in \mathbb{R}_+, B \subseteq \Psi_t(B)$ . Si de plus  $B$  est fortement positivement invariant sous  $\Psi$ , alors pour tout  $t \in \mathbb{R}_+, \Psi_t(B) = B$ .

**Définition 4.2.** Soit  $p \in (\mathbb{R}_+)^2$ . L'ensemble  $\omega$ -limite de  $p$  sous  $\Psi$  est défini par

$$\omega_\Psi(p) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} \overline{\Psi_{[t, +\infty[}(p)}.$$

**Proposition 4.3.** Pour tout  $p \in M$ , l'ensemble  $\omega_\Psi(p)$  est fortement positivement invariant et invariant sous  $\Psi$ .

**Démonstration.** Voir l'annexe B. ■

On note  $C_{min}$  et  $C_{max}$  les courbes instables associées à  $(0, y_{min})$  et  $(0, y_{max})$  qui sont des points-selles de leurs champs respectifs. Ces courbes étant des variétés  $\mathcal{C}^\infty$  transverses à l'axe des ordonnées, il existe  $\delta_x, \delta_y > 0$ , et des fonctions  $g_{min}, g_{max} : ]-\delta_x, \delta_x[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telles que  $C_{min/max}$  coïncide avec le graphe de  $g_{min/max}$  sur le rectangle ouvert  $]-\delta_x, \delta_x[ \times ]y_{min/max} - \delta_y, y_{min/max} + \delta_y[$ . De plus, si l'on note  $\vec{u}_{min} = (u_{min,x}, u_{min,y})$  l'unique vecteur unitaire tangent à  $C_{min}$  en  $(0, y_{min})$  tel que  $u_{min,x} > 0$ , alors  $(\vec{u}_{min}, \vec{e}_y)$  est une base de diagonalisation de la jacobienne du champ  $F^{J_{min}}$  au point  $(0, y_{min})$ , associée à des valeurs propres  $\mu_{min} > 0$  et  $-\nu_{min} < 0$ . On définit de façon analogue  $\vec{u}_{max}, \mu_{max}, \nu_{max}$ .

Avant de poursuivre, donnons quelques définitions complémentaires de topologie.

**Définition 4.4.** On appelle **rétraction par déformation** d'un espace topologique  $\mathbb{X}$  sur un sous-espace  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$  toute application continue  $\text{Ret} : \mathbb{X} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$  telle que :

- ★ pour tout  $x \in \mathbb{X}, \text{Ret}(x, 0) = x$ , et  $\text{Ret}(x, 1) \in \mathbb{A}$  ;
- ★ pour tout  $a \in \mathbb{A}, \text{Ret}(a, 1) = a$ .

**Définition 4.5.** On dit qu'un espace topologique  $\mathbb{X}$  est **contractile** s'il existe une rétraction par déformation de  $\mathbb{X}$  sur l'un de ses points.

**Définition 4.6.** Une **courbe de Jordan** dans  $\mathbb{R}^2$  est l'image d'une application  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  continue, injective sur  $[0, 1[$  et vérifiant  $\gamma(0) = \gamma(1)$ .

On appellera **domaine de Jordan** tout domaine de  $\mathbb{R}^2$  compact dont la frontière est une courbe de Jordan.

Nous pouvons désormais énoncer le théorème caractérisant la topologie de  $\Gamma$  dans le cadre persistant.

**Théorème 4.7.** *Supposons  $\Lambda_y > 0$ . L'ensemble  $\Gamma$  vérifie les propriétés suivantes<sup>40</sup> :*

1.  $\Gamma$  contient un domaine de Jordan  $\mathcal{K}$  tel que  $\mathcal{K} \cap M_0^y = [x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\}$ .
2. Si  $(\{0\} \times [y_{\min}, y_{\max}]) \subseteq \Gamma$ , alors il existe  $0 < h \leq \delta_x$  tel que

$$\Gamma \cap M_{[0,h]}^x = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq x < h, g_{\min}(x) \leq y \leq g_{\max}(x)\}.$$

3.  $\Gamma$  est égal à l'adhérence de son intérieur.
4.  $\Gamma$  est contractile, en particulier connexe par arcs et simplement connexe.
5.  $\Gamma \setminus M_0$  est connexe par arcs.
6.  $\Gamma = \omega_\Psi(p)$  pour tout  $p \in \Gamma$ . En particulier,  $\Gamma$  est fortement positivement invariant et invariant sous  $\Psi$ , et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\Psi_t(\Gamma) = \Gamma$ .
7.  $\Gamma \cap \mathbb{R}_+ \times \{0\} = [x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\}$ .

**Démonstration.** Commençons par le point 1. Nous pouvons réutiliser les objets introduits par le lemme 3.9 et sa preuve. Choisissons  $\delta > 0$  suffisamment petit de façon à ce que, en notant  $C_\delta = C_{\text{instable}} \cap \Diamond_\delta$  :

- ★  $C_\delta$  est transverse en tout point<sup>41</sup> aux champs  $F^{i_{\min}}$  et  $F^{i_{\max}}$  (cf. figure 5) ;
- ★  $H_x(\cdot, i_{\max}) > 0$  et  $H_x(\cdot, i_{\min}) < 0$  sur  $C_\delta$ .

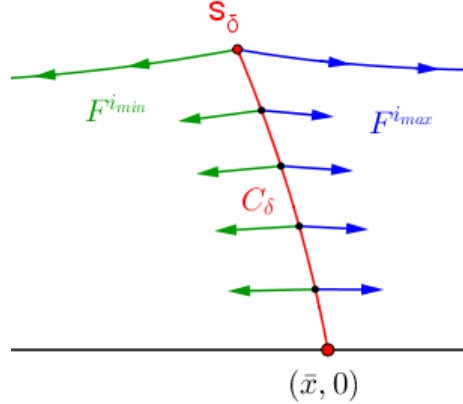


FIGURE 5 – Champs  $F^{i_{\min}}$  et  $F^{i_{\max}}$  transverses à  $C_\delta$ .

Notons  $\gamma_0 : \mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \Phi_t^{i_{\min}}(S_\delta)$  et  $\gamma_1 : \mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \Phi_t^{i_{\max}}(S_\delta)$ , les courbes intégrales de  $F^{i_{\min}}$  et  $F^{i_{\max}}$  issues de  $S_\delta$ . Notons également  $D_\delta$  la demi-droite issue de  $S_\delta$  dirigée par  $\vec{e}_y$ , et  $\mathcal{O}_g$  (resp.  $\mathcal{O}_d$ ) l'ensemble des points de  $(\mathbb{R}_+)^2$  situés strictement à gauche (resp. à droite) de la barrière  $C_\delta \cup D_\delta$ . En raison des items ci-dessus, le champ  $F^{i_{\min}}$  (resp.  $F^{i_{\max}}$ ) pointe vers  $\mathcal{O}_g$  (resp.  $\mathcal{O}_d$ ) en  $S_\delta$ , donc  $\gamma_0(t) \in \mathcal{O}_g$  (resp.  $\gamma_1(t) \in \mathcal{O}_d$ ) pour  $t > 0$  petit. Notons

$$t_0 = \inf\{t > 0 : H_x(\gamma_0(t), i_{\min}) \geq 0\}.$$

C'est le temps de sortie de l'ouvert  $\{H_x(\cdot, i_{\min}) > 0\}$  de la courbe  $\gamma_0$ , éventuellement infini. Pour tout  $0 < t < T_0$ , on a  $\dot{\gamma}_{0,x}(t) < 0$  donc sur cet intervalle de temps  $\gamma_0$  ne peut avoir traversé  $D_\delta$  de gauche

<sup>40</sup>. Les points 1 et 2 sont des points nouveaux par rapport à [BL16]. Le point 4 est une amélioration, car dans [BL16] il est seulement montré que  $\Gamma \setminus M_0^x$  est contractile.

<sup>41</sup>. Dans ce cas il est nécessaire que  $F^{i_{\min}}$  pointe à gauche et  $F^{i_{\max}}$  à droite sur tout  $C_\delta$ .

à droite. La courbe ne peut pas non plus avoir franchi  $C_\delta$  vers la droite, donc pour tout  $0 < t < t_0$ ,  $\gamma_0(t) \in \mathcal{O}_g$ . Ensuite pour  $t \geq t_0$ ,  $\gamma_0$  reste dans la zone  $\{H_{\mathbf{x}}(\cdot, i_{\min}) \geq 0\}$  qui est invariante pour le champ  $F^{i_{\min}}$ . On en déduit que la courbe  $\gamma_0$  n'intersecte  $C_\delta$  qu'au temps  $t = 0$ . De plus on sait que  $\gamma_0(t) \rightarrow (x_{\min}, 0)$ . On peut donc définir un domaine de Jordan  $\mathcal{K}_0$  (voir figure 6) délimité par la frontière :

$$\partial\mathcal{K}_0 = \gamma_0(\mathbb{R}_+) \cup [x_{\min}, \bar{x}] \times \{0\} \cup C_\delta.$$

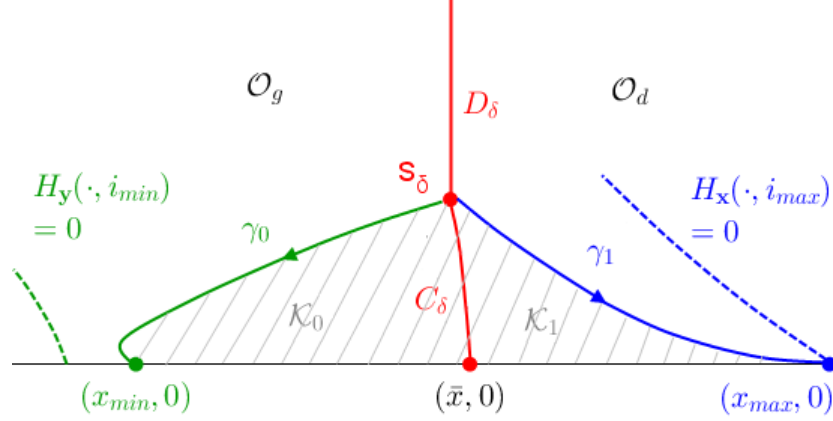


FIGURE 6 – Construction du domaine de Jordan  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1$  constitué de points accessibles.

La zone

$$\mathcal{H}_0 := \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 : H_{\mathbf{y}}(x, y, i_{\min}) \geq 0\}$$

est connexe par arcs et contient l'origine qui est à l'extérieur de  $\mathcal{K}_0$ , mais aucun point sur la frontière de  $\mathcal{K}_0$ . En effet la portion  $([x_{\min}, \bar{x}] \times \{0\}) \cup C_\delta$  est disjointe de  $\mathcal{H}_0$ , et  $\gamma_0$  reste dans  $\{H_{\mathbf{y}}(\cdot, i_{\min}) < 0\}$  (le complémentaire de  $\mathcal{H}_0$ ), qui est invariant par le flot de  $F^{i_{\min}}$ . Par conséquent la zone  $\mathcal{H}_0$  est disjointe de  $\mathcal{K}_0$ , i.e. :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{K}_0, \quad H_{\mathbf{y}}(x, y, i_{\min}) < 0.$$

Soit  $(x_0, y_0) \in \mathcal{K}_0 \setminus \{(x_{\min}, 0)\}$ . Il s'agit de montrer que la courbe  $\sigma_0 : t \mapsto \Phi_{-t}^{i_{\min}}(x_0, y_0)$  atteint  $C_\delta$  pour un certain  $t \in \mathbb{R}_+$ . C'est le cas si  $y_0 = 0$ . Sinon, on a

$$\sup_{(x, y) \in \mathcal{K}_0, y \geq y_0} (F_y^{i_{\min}}(x, y)) < 0,$$

donc cette courbe voit son ordonnée augmenter suffisamment vite pour sortir de  $\mathcal{K}_0$  en temps fini. Elle en sort nécessairement au niveau de  $C_\delta$  car le reste de la frontière est constitué de portions de courbes intégrales pour  $F^{i_{\min}}$ . Par conséquent, en renversant le temps, le point  $(x_0, y_0)$  est accessible à partir d'un point de  $C_\delta$  en suivant le champ  $F^{i_{\min}}$  : comme  $C_\delta \subseteq \Gamma$ , cela montre que  $(x_0, y_0)$  est aussi un point de  $\Gamma$ . Nous avons donc montré que  $\mathcal{K}_0 \subseteq \Gamma$ .

En ce qui concerne la courbe  $\gamma_1$ , elle reste à l'intérieur de l'ouvert  $\{H_{\mathbf{x}}(\cdot, i_{\max}) > 0\}$  qui est positivement invariant sous le flot de  $F^{i_{\max}}$ . Ainsi son abscisse augmente strictement, donc elle ne peut franchir  $D_\delta$  de droite à gauche. Comme elle ne peut pas non plus traverser  $C_\delta$  vers la gauche, elle reste dans  $\mathcal{O}_d$  pour tous les instants  $t > 0$ . On sait aussi que  $\gamma_1(t) \rightarrow (x_{\max}, 0)$ . De la même manière que précédemment, on peut donc définir un domaine de Jordan  $\mathcal{K}_1$  (voir figure 6) délimité par la frontière :

$$\partial\mathcal{K}_1 = \gamma_1(\mathbb{R}_+) \cup ([\bar{x}, x_{\max}] \times \{0\}) \cup C_\delta.$$

La zone

$$\mathcal{H}_1 := \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 : H_{\mathbf{x}}(x, y, i_{\min}) \leq 0\} \setminus \{(x_{\max}, 0)\}$$

est connexe par arcs et non bornée donc intersecte l'extérieur de  $\mathcal{K}_1$ , mais n'intersecte pas la frontière de  $\mathcal{K}_1$ . Par conséquent  $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{K}_1 = \emptyset$ , i.e. :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{K}_1 \setminus \{(x_{\max}, 0)\}, \quad H_{\mathbf{x}}(x, y, i_{\max}) > 0.$$

Soit  $(x_1, y_1) \in \mathcal{K}_1 \setminus \{(x_{\max}, 0)\}$ . Il s'agit de montrer que la courbe  $\sigma_1 : t \mapsto \Phi_{-t}^{i_{\max}}(x_1, y_1)$  atteint  $C_\delta$  pour un certain  $t \in \mathbb{R}_+$ . Comme  $H_{\mathbf{x}}(x_1, y_1, i_{\max}) > 0$ , on a nécessairement  $x_1 < x_{\max}$ . Par conséquent, on a

$$\inf_{(x, y) \in \mathcal{K}_1, x \leq x_1} (F_x^{i_{\max}}(x, y)) > 0,$$

ce qui fait que la courbe  $\sigma_1$  voit son abscisse diminuer suffisamment vite pour sortir de  $\mathcal{K}_1$  en temps fini. On conclut ensuite comme précédemment que  $(x_1, y_1) \in \Gamma$ . Le domaine  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1$ , qui est aussi un domaine de Jordan de frontière

$$\partial\mathcal{K} = \gamma_0(\mathbb{R}_+) \cup ([x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\}) \cup \gamma_1(\mathbb{R}_+),$$

vérifie les conditions du point 1 du théorème.

Supposons maintenant  $[(0, y_{\min}), (0, y_{\max})] \subseteq \Gamma$  et démontrons le point 2. Tout d'abord, un raisonnement similaire à celui réalisé dans la preuve du lemme 3.9 montre que les courbes instables  $C_{\min}$  et  $C_{\max}$  sont incluses dans  $\Gamma$ . Poursuivons par le lemme suivant.

**Lemme 4.8.** *Notons  $(x', y')$  les coordonnées associées au repère d'origine  $(0, y_{\min})$  et de base  $(\vec{u}_{\min}, \vec{e}_{\mathbf{y}})^{42}$ . Il existe  $\alpha > 0, \delta > 0$  tel que pour tout  $0 < h \leq \delta$  et tout point  $p$  :*

- (a) *Si  $0 \leq x'(p) \leq \alpha h$  et  $|y'(p)| = h$ , alors  $^{43} \text{sgn}(F_y^{j_{\min}}(p)) = -\text{sgn}(y'(p))$ ;*
- (b) *Si  $\frac{\alpha}{2}h \leq x'(p) \leq \alpha h$  et  $|y'(p)| \leq h$ , alors  $F_{x'}^{j_{\min}}(p) \geq \frac{\mu_{\min} \alpha}{4}h$ ;*
- (c) *Si  $0 \leq x'(p) \leq \alpha h$  et  $|y'(p)| \leq h$ , alors  $|F_{y'}^{j_{\min}}| \leq 2\nu_{\min} h$ .*

*Il en est de même en remplaçant min par max.*

**Démonstration.** En notant  $L$  la différentielle de  $F_y^{j_{\min}}$  en  $(0, y_{\min})$ , on a :

$$F_y^{j_{\min}}((0, y_{\min}) + x'\vec{u}_{\min} + y'\vec{e}_{\mathbf{y}}) = x'L \cdot \vec{u}_{\min} + y'L \cdot \vec{e}_{\mathbf{y}} + o(|x'| + |y'|).$$

Notons  $A = L \cdot \vec{u}_{\min}$  et  $B = L \cdot \vec{e}_{\mathbf{y}} = y_{\min} \partial_y H_{\mathbf{y}}(0, y_{\min}, j_{\min}) < 0$ . Soient  $0 < \alpha \leq 1$  tel que  $|A|\alpha < |B|/3$ , et  $\beta < |B|/3$ . Il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall 0 \leq x', y' \leq \delta, \quad |F_y^{j_{\min}}((0, y_{\min}) + x'\vec{u}_{\min} + y'\vec{e}_{\mathbf{y}}) - x'A - y'B| \leq \beta(|x'| + |y'|).$$

Soient alors  $0 < h \leq \delta$ ,  $0 \leq x' \leq \alpha h$ ,  $y' = \pm h$ . On a

$$|F_y^{j_{\min}}((0, y_{\min}) + x'\vec{u}_{\min} + y'\vec{e}_{\mathbf{y}}) - By'| \leq |A|\alpha h + \beta(\alpha h + h) < |B|h,$$

ce qui implique le point (a) .

En ce qui concerne le reste, nous avons les développements limités

$$F_{x'}^{j_{\min}} = \mu_{\min} x' + o(|x'| + |y'|) \quad \text{et} \quad F_{y'}^{j_{\min}} = -\nu_{\min} y' + o(|x'| + |y'|)$$

42. Plus loin  $(F_{x'}^{j_{\min}}, F_{y'}^{j_{\min}})$  désignent naturellement les coordonnées du champ  $F^{j_{\min}}$  dans cette base.

43. Il s'agit bien de  $y$  en indice à gauche.

Quitte à réduire  $\delta$ , on peut donc supposer que pour  $|x'|, |y'| \leq \delta$  :

$$F_{x'}^{j_{min}} \geq \mu_{min} x' - \frac{\mu_{min} \alpha}{8} (|x'| + |y'|) \quad \text{et} \quad |F_{y'}^{j_{min}}| \leq \nu_{min} |y'| + \frac{\nu_{min}}{2} (|x'| + |y'|).$$

Cela implique les points (b) et (c) . La même preuve est valable en changeant  $min$  en  $max$ .  $\square$

Dans le lemme suivant, nous faisons une première moitié de chemin dans la preuve de la propriété 2 du théorème.

**Lemme 4.9.** *Il existe  $0 < \varepsilon \leq \delta_{\mathbf{x}}$  tel que*

$$\Gamma \cap M_{[0, \varepsilon]}^{\mathbf{x}} \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq x < \varepsilon, g_{min}(x) \leq y \leq g_{max}(x)\}.$$

**Démonstration.** Soient  $\delta, \alpha > 0$  fournis par le lemme 4.8 appliqué en  $(0, y_{min})$ . Par définition de  $y_{min}$ , on a  $H_{\mathbf{y}}(0, y_{min}, j) > 0$  pour tout  $j \in \mathcal{E} \setminus \{j_{min}\}$ , donc quitte à prendre  $\delta$  plus petit on peut supposer que le parallélogramme  $\square_{\delta}$  défini par les inéquations  $0 \leq x' \leq \alpha$ ,  $-\delta \leq y' \leq \delta$  est inclus dans l'ouvert  $\cap_{j \in \mathcal{E} \setminus \{j_{min}\}} \{H_{\mathbf{y}}(\cdot, j) > 0\}$ . Comme tous les environnements sont favorables à l'espèce  $\mathbf{x}$ , cet ouvert est inclus dans  $\cap_{j \in \mathcal{E} \setminus \{j_{min}\}} \{H_{\mathbf{x}}(\cdot, j) > 0\}$ . En raison du point (b) du lemme 4.8<sup>44</sup>, l'arête droite du parallélogramme, définie par  $x' = \alpha$ ,  $\delta \leq y' \leq \delta$ , est alors incluse dans  $\cap_{j \in \mathcal{E}} \{H_{\mathbf{x}}(\cdot, j) > 0\}$ . De plus lorsque  $y'$  diminue à  $x'$  constant, autrement dit lorsque l'on descend à la verticale,  $H_{\mathbf{x}}(\cdot, j)$  augmente pour tout  $j$ . Par conséquent, pour tous les points  $p \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  de coordonnées  $x' = \alpha$ ,  $y' \leq \delta$ , on a  $F_{x'}^j(p) > 0$  pour tout  $j \in \mathcal{E}$ . Quitte à réduire encore  $\delta$  (ce qui précède restant valable), on peut aussi supposer que  $\delta < \delta_{\mathbf{x}}$  et que tous les champs  $F^j$ ,  $j \neq j_{min}$  sont transverses à la courbe  $C_{min}$  dans  $\square_{\delta}$ , ce qui nous donne le schéma de la figure 7. On y voit qu'en posant  $\varepsilon_1 = u_{min, \mathbf{x}} \alpha \delta$ , la zone

$$\mathcal{V}_1 := \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 : 0 \leq x < \varepsilon_1, 0 \leq y < g_{min}(x)\}$$

est inaccessible depuis son extérieur. Elle est donc disjointe de  $\Gamma$ .

Appliquons maintenant le lemme 4.8 en  $(0, y_{max})$ , ce qui nous fournit, en recyclant les notations, de nouveaux  $\delta, \alpha > 0$  et un nouveau parallélogramme  $\square_{\delta}$ . On suppose sans perte de généralité que  $\delta < \delta_{\mathbf{x}}$  et que tous les champs  $F^j$ ,  $j \neq j_{max}$  sont transverses à la courbe  $C_{max}$  dans  $\square_{\delta}$ . Par définition de  $y_{max}$  :

$$\forall j \in \mathcal{E} \setminus \{j_{max}\}, \quad F_{y'}^j(0, y_{max}) = F_y^j(0, y_{max}) < 0.$$

Ainsi la quantité

$$I_{\delta} := \inf \{ -F_{y'}^j(p), p \in \square_{\delta}, j \in \mathcal{E} \setminus \{j_{max}\} \}$$

converge vers  $I > 0$  quand  $\delta \rightarrow 0$ . D'autre part

$$s_{\delta} := \sup \{ |F_{x'}^j(p)|, p \in \square_{\delta}, j \in \mathcal{E} \setminus \{j_{max}\} \}$$

tend vers 0 quand  $\delta \rightarrow 0$ . Quitte à diminuer  $\delta$  on peut donc supposer  $0 < s_{\delta}/I_{\delta} \leq \alpha/8$ . Ceci assure que le segment  $\mathcal{T}_{\delta}$  d'équation

$$x' - \alpha \delta = \frac{2 s_{\delta}}{I_{\delta}} (y' - \delta), \quad -\delta \leq y' \leq \delta$$

est inclus dans la zone définie par les inéquations  $(\alpha/2)\delta \leq x' \leq \alpha \delta$ ,  $-\delta \leq y' \leq \delta$ . On est alors en

---

44. Il y a équivalence sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  entre  $F_{x'}^{j_{min}} > 0$ ,  $F_x^{j_{min}} > 0$  et  $H_{\mathbf{x}}(\cdot, j_{min}) > 0$ .

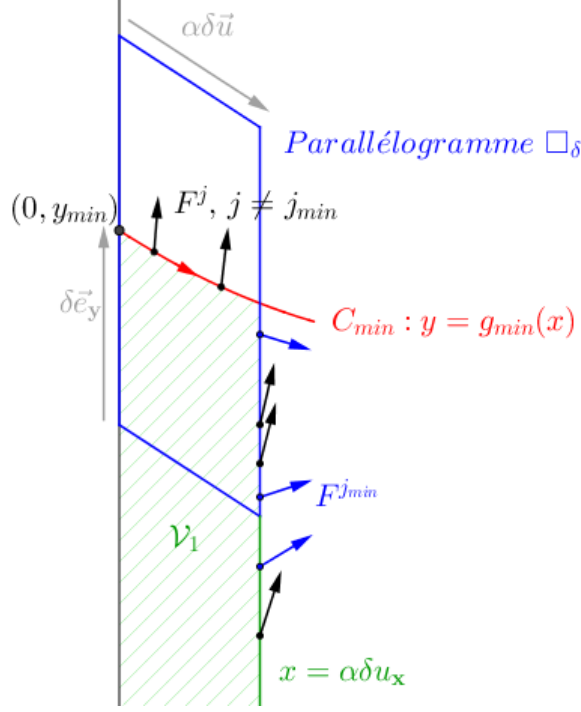


FIGURE 7 – Le domaine  $\mathcal{V}_1$  (hachuré en vert) est inaccessible depuis son extérieur.

mesure d'appliquer le point (b) du lemme 4.8, qui nous donne :

$$\forall p \in \mathcal{T}_\delta, \quad \begin{cases} F_{x'}^{j_{max}}(p) > 0, \\ \frac{F_{y'}^{j_{max}}(p)}{F_{x'}^{j_{max}}(p)} \leq \frac{8 \nu_{max}}{\mu_{max} \alpha}. \end{cases}$$

Choisissons  $\delta$  tel que  $8 \nu_{max} / (\mu_{max} \alpha) < I_\delta / (2 s_\delta)$ . L'orientation des champs  $F^j$  au niveau du segment  $\mathcal{T}_\delta$  est représentée sur la figure 8 : quand ce segment est parcouru vers le haut, tous ces champs pointent à droite. Notre but est de construire la zone  $\mathcal{V}_2$  dessinée sur cette figure, qui est inaccessible depuis son extérieur.

Il nous reste à définir la demi-droite  $D_\delta$ . Soit  $A_\delta$  le sommet supérieur droit du parallélogramme  $\square_\delta$ , on sait d'après le point (a) du lemme 4.8 que  $F_y^{j_{max}}(A_\delta) < 0$ , et quitte à prendre  $\delta$  suffisamment petit la même chose est vraie en remplaçant  $j_{max}$  par  $j \in \mathcal{E}$  quelconque. Notons

$$J_\delta := \inf_{j \in \mathcal{E}} (-F_y^j(A_\delta)) > 0,$$

et

$$C := \sup_{(p,j) \in \mathbf{M}} |F_x^j(p)|.$$

On définit alors  $D_\delta$  comme la demi-droite d'origine  $A_\delta$  et dirigée par le vecteur de coordonnées  $(2C, J_\delta)$ . Pour tout point  $p \in D_\delta \cap M$  et tout  $j \in \mathcal{E}$ , on a  $F_y^j(p) \leq F_y^j(A_\delta) \leq -J_\delta$  et  $F_x^k(p) \geq -C$ , ce qui implique là-aussi que sur  $M$  les champs pointent à droite de  $D_\delta$  quand celle-ci est parcourue vers le haut. Il apparaît clairement sur la figure 8 que la zone  $\mathcal{V}_2$  est inaccessible depuis son extérieur dans  $M$  : elle est donc elle aussi disjointe de  $\Gamma$ . En notant  $\varepsilon_2$  l'abscisse du point d'intersection entre

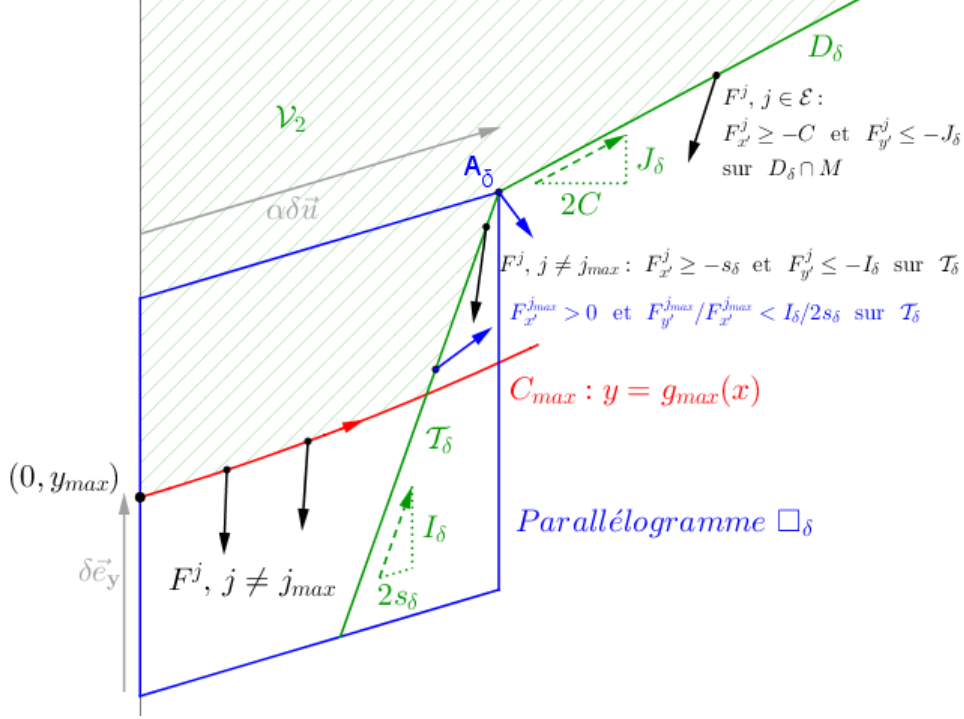


FIGURE 8 – Le domaine  $\mathcal{V}_2$  (hachuré en vert) est inaccessible depuis son extérieur dans  $M$ .

$T_\delta$  et  $C_{max}$ , nous obtenons :

$$\Gamma \cap \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 : 0 \leq x < \varepsilon_2, y > g_{max}(x)\} = \emptyset.$$

Le lemme est démontré avec  $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ .  $\square$

Fixons désormais  $y_{min} < y_0 < y_{max}$  quelconque. On a  $F_y^{j_{max}} > 0$  sur le segment  $\{0\} \times [y_{min}, y_0]$ , donc c'est aussi le cas sur  $\mathcal{K}_{\varepsilon'_1} := [0, \varepsilon'_1] \times [y_{min} - \varepsilon'_1, y_0 + \varepsilon'_1]$  pour  $\varepsilon'_1 > 0$  suffisamment petit. On peut supposer  $y_0 + \varepsilon'_1 < y_{max}$  et  $\varepsilon'_1 < \varepsilon$ . Soit  $t_0 > 0$  tel que  $\Phi_{t_0}^{j_{max}}(0, y_{min}) = (0, y_0 + \varepsilon'_1)$ , alors il existe  $\tilde{\varepsilon}_1 \leq \varepsilon'_1$  tel que

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} \|\Phi_t^{j_{max}}(\tilde{\varepsilon}_1, g_{min}(\tilde{\varepsilon}_1)) - \Phi_t^{j_{max}}(0, y_{min})\| \leq \varepsilon'_1.$$

Alors  $\left(\Phi_{t_0}^{j_{max}}(\tilde{\varepsilon}_1, g_{min}(\tilde{\varepsilon}_1))\right)_y \geq y_0$ , d'où l'existence de  $t_1 \leq t_0$  tel que  $\left(\Phi_{t_1}^{j_{max}}(\tilde{\varepsilon}_1, g_{min}(\tilde{\varepsilon}_1))\right)_y = y_0$ . Notons  $\gamma : [0, t_1] \rightarrow \mathcal{K}_{\varepsilon'_1}$  la courbe définie par  $\gamma(t) = \Phi_t^{j_{max}}(\tilde{\varepsilon}_1, g_{min}(\tilde{\varepsilon}_1))$ , et  $h_1 := \inf_{0 \leq t \leq t_1} \gamma_x(t)$ . Par construction  $\dot{\gamma}_y = F_y^{j_{max}}(\gamma) > 0$ , donc en particulier, pour tout  $t < t_1$ ,  $\gamma_y(t) < \gamma_y(t_1) = y_0$ . De plus  $\dot{\gamma}$  pointe au-dessus de  $C_{min}$  en 0<sup>45</sup>, et si l'on définit

$$\mathcal{W}_1 = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : y > g_{min}(x \wedge \tilde{\varepsilon}_1)\},$$

alors pour  $t > 0$  petit,  $\gamma(t) \in \mathcal{W}_1$ . Comme pour tout  $0 < t \leq t_1$ , on a  $\gamma_y(t) > \gamma_y(0) = g_{min}(\tilde{\varepsilon}_1)$ , pour que  $\gamma$  ressorte de  $\mathcal{W}_1$  il faudrait qu'elle traverse la courbe  $C_{min}$  vers le bas au niveau d'un point d'abscisse  $x \leq \tilde{\varepsilon}_1$ , ce qui est impossible. Ainsi la courbe  $\gamma$  intersecte uniquement en  $t = 0$  le graphe de  $g_{min}$  sur  $[0, \tilde{\varepsilon}_1]$ , que l'on notera  $\mathcal{G}_1$ . Comme le montre la figure 9, on peut donc définir un domaine de Jordan  $\mathcal{T}_1$  délimité par :

<sup>45</sup>. Par construction de la constante  $\varepsilon$  les champs  $F^j, j \neq j_{min}$  pointent au-dessus de  $C_{min}$  au niveau des points d'abscisse  $x \leq \varepsilon$ .



- le segment  $\{0\} \times [y_{min}, y_0]$  à gauche ;
- le graphe  $\mathcal{G}_1$  en bas ;
- la courbe  $\gamma$  à droite ;
- le segment  $[0, \gamma_x(t_1)] \times \{y_0\}$  en haut.

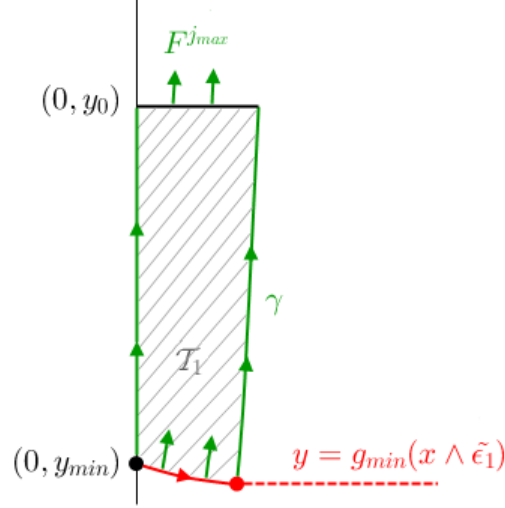


FIGURE 9 – Construction du tube  $\mathcal{T}_1 \subseteq \Gamma$ .

Vis à vis du champ  $F^{j_{max}}$ , les frontières gauche et droite de ce domaine sont des portions de courbes intégrales, sa frontière inférieure est entrante et sa frontière supérieure sortante : on a donc là un tube de champ. De plus,  $\mathcal{T}_1$  est inclus dans  $\mathcal{K}_{\varepsilon'_1}$ , donc sur ce domaine  $F_y^{j_{max}}$  est bornée inférieurement par une constante strictement positive. Ainsi, pour tout point  $p \in \mathcal{T}_1$ , la courbe  $t \mapsto \Phi_{-t}^{j_{max}}(p)$  sort nécessairement du tube  $\mathcal{T}_1$  en un point  $q \in \mathcal{G}_1$ . En renversant le temps, cela nous dit que le point  $q$  mène à  $p$  en suivant la champ  $F^{j_{max}}$ . Or,  $\mathcal{G}_1 \subseteq C_{min}$  est constitué de points accessibles, donc  $p$  est aussi accessible. On en conclut que la zone

$$\mathcal{L}_1 = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 : x \leq h_1, g_{min}(x) \leq y \leq y_0\},$$

bien définie et incluse dans  $\mathcal{T}_1$  d'après la définition de  $h_1$ , est aussi incluse dans  $\Gamma$ .

On peut faire une construction similaire d'un tube  $\mathcal{T}_0$  du champ  $F^{j_{min}}$ , limité supérieurement par une portion de la courbe  $C_{max}$ , nous fournissant  $h_0 > 0$  tel que

$$\mathcal{L}_0 := \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 : x \leq h_0, y_0 \leq y \leq g_{max}(x)\}$$

soit incluse dans  $\Gamma$ . Le point 2 du théorème est donc finalement démontré avec  $h = \min(h_1, h_0)$ .

Passons au point 3. L'ensemble  $\cup_{(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}} \Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(\mathring{\Gamma})$  est un ouvert, inclus dans  $\Gamma$  et contenant  $\mathring{\Gamma}$  : c'est donc  $\mathring{\Gamma}$ . Cet ensemble non vide contient au moins un point  $p$ , ce qui entraîne :

$$\Gamma = \text{Acc}(p) = \overline{\cup_{(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}} \Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p)} \subseteq \overline{\mathring{\Gamma}}.$$

Concernant le point 4, nous avons deux cas à considérer :  $\Gamma \cap M_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$ , ou  $\{0\} \times [y_{min}, y_{max}] \subseteq \Gamma$

(voir proposition 2.10). Dans le premier cas, l'application

$$\begin{aligned} \text{cont}_\Gamma : \Gamma \times [0, 1] &\rightarrow \Gamma \\ (p, u) &\mapsto \Phi_{-\log(1-u)}^{i_{min}}(p) \end{aligned}$$

se prolonge par continuité sur  $\Gamma \times [0, 1]$  en posant  $\text{cont}_\Gamma(1, p) = (x_{min}, 0)$  pour tout  $p \in \Gamma$ . En effet, le point  $(x_{min}, 0)$  est un puits du champ  $F^{i_{min}}$  et sa différentielle  $DF^{i_{min}}$  se diagonalise dans une base  $(\vec{e}_x, \vec{u})$ , avec des valeurs propres strictement négatives. Donc, en notant  $(x', y')$  les coordonnées associées au repère d'origine  $(x_{min}, 0)$  et de base  $(\vec{e}_x, \vec{u})$ , d'après la proposition D.2 il existe  $\delta > 0$  tel que pour  $\delta' \leq \delta$ , le parallélogramme

$$\mathcal{B}_{\delta'} = \{p \in \mathcal{U} : \max(|x'(p)|, |y'(p)|) \leq \delta'\}$$

soit positivement invariant par le flot  $\Phi^{i_{min}}$ . Si l'on se fixe  $p \in \Gamma$  et  $0 < \delta' \leq \delta$ , alors étant donné que  $\Phi_t^{i_{min}}(p) \rightarrow (x_{min}, 0)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , il existe  $T > 0$  tel que  $\Phi_T^{i_{min}}(p) \in \mathcal{B}_{\delta'/2}$ . Dès lors il existe un voisinage  $\mathcal{V}_p$  de  $p$  tel que pour tout  $p' \in \mathcal{V}_p$ , on ait  $\Phi_T^{i_{min}}(p') \in \mathcal{B}_{\delta'}$ . Ceci implique :

$$\forall t \geq T, p' \in \mathcal{V}_p, \quad \Phi_t^{i_{min}}(p') \in \mathcal{B}_{\delta'},$$

et donc la continuité de  $c_\Gamma$  au niveau des points de  $\Gamma \times \{1\}$ . Ainsi, l'application  $\text{cont}_\Gamma$  constitue une rétraction par déformation de  $\Gamma$  sur le point  $(x_{min}, 0)$ .

Dans le cas où  $\Gamma \supseteq \{0\} \times [y_{min}, y_{max}]$ , nous procédons en deux temps. On construit une première rétraction par déformation

$$\begin{aligned} \text{ret}_\Gamma : \Gamma \times [0, 1] &\rightarrow \Gamma \\ (x, y, u) &\mapsto (x_u, y_u), \end{aligned}$$

en posant :

$$\begin{aligned} x_u &= \begin{cases} (1-u)x + u h/2 & \text{si } x \leq h/2, \\ x & \text{si } x \geq h/2, \end{cases} \\ y_u &= \begin{cases} \frac{g_{max}(x) - y}{g_{max}(x) - g_{min}(x)} g_{min}(x_u) + \frac{y - g_{min}(x)}{g_{max}(x) - g_{min}(x)} g_{max}(x_u) & \text{si } x \leq h/2, \\ y & \text{si } x \geq h/2. \end{cases} \end{aligned}$$

L'application  $\text{ret}_\Gamma$  rétracte continument  $\Gamma$  sur  $\Gamma \setminus M_{0,h/2}^\times$ . On peut ensuite définir

$$\text{cont}'_\Gamma : \Gamma \setminus M_{0,h/2}^\times \times [0, 1] \rightarrow \Gamma$$

de façon identique à  $\text{cont}_\Gamma$ . Il suffit de concaténer les deux applications pour obtenir une rétraction par déformation de  $\Gamma$  sur le point  $(x_{min}, 0)$ .

En ce qui concerne le point 5, soient  $p, q \in \Gamma \setminus M_0$ . Étant donné que  $\mathring{\mathcal{K}}$  est non vide et constitué de points accessibles, il existe des courbes  $\eta_p \in \mathcal{S}_p$  et  $\eta_q \in \mathcal{S}_q$  entrant dans  $\mathring{\mathcal{K}}$ . Or ces courbes sont incluses dans  $\Gamma \setminus M_0$ , de même que  $\mathring{\mathcal{K}}$ , qui de plus est connexe par arcs. Par conséquent  $p$  et  $q$  sont dans la même composante connexe par arcs dans  $\Gamma \setminus M_0$ .

Passons au point 6. Fixons  $p \in \Gamma$ . Si  $q \in \omega_\Psi(p)$  alors en particulier  $q \in \Psi_{\mathbb{R}_+}(p) = \text{Acc}(p)$  et donc  $q \in \Gamma$ . Réciproquement, supposons  $q \in \Gamma$ . D'après le lemme 3.9, nous savons qu'il existe  $p^* \in \Gamma \setminus M_0$  vérifiant le critère faible d'Hörmander. Le théorème A.19 entraîne alors l'existence de  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}_{n,ad(p^*)}^+$  tels que  $\mathbf{v} \mapsto \Phi_{\mathbf{v}}^{\mathbf{i}}(p^*)$  soit une submersion en  $\mathbf{u}$ . Le lemme A.11 fournit des ouverts  $\mathcal{J}$  contenant  $p^*$ ,  $\mathcal{W}$

contenant  $\Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p^*)$  et  $\mathcal{I} \subseteq (\mathbb{R}_+^*)^n$  contenant  $\mathbf{u}$ , tels que :

$$\forall r \in \mathcal{J}, \mathcal{W} \subseteq \Phi_{\mathcal{I}}^{\mathbf{i}}(r). \quad (44)$$

Fixons un point  $piv \in \mathcal{W}$ . Pour tout point  $b \in \Gamma \setminus M_0$ , l'accessibilité de  $p^*$  implique l'existence de  $\eta \in \mathcal{S}_b$  et  $s \in \mathbb{R}_+$  tels que  $b' := \eta(s) \in \mathcal{J}$ . Ensuite, (44) montre qu'il existe  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{I}$  tel que  $\Phi_{\mathbf{v}}^{\mathbf{i}}(b') = piv$ . On note alors  $\xi_{b,piv} : [0, s + v_1 + \dots + v_n] \rightarrow \Gamma$  le chemin d'origine  $b$  et d'extrémité  $piv$  constitué par la concaténation des chemins  $\eta$  sur  $[0, s]$  et  $\eta_{b', \mathbf{i}, \mathbf{v}}$  sur  $[0, v_1 + \dots + v_n]$ . Remarquons que  $v_1 + \dots + v_n > 0$ , donc la durée du chemin  $\xi_{b,piv}$  est non nulle. Par conséquent, pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$ , en concaténant  $\xi_{b,piv}$  avec un nombre suffisant de lacets  $\xi_{piv,piv}$ , on peut construire un chemin  $\xi$ , de durée  $t \geq T$ , d'origine  $b$  et d'extrémité  $piv$ , solution de l'inclusion différentielle (ID). Si l'on se donne un ouvert quelconque  $\mathcal{V}_q \ni q$ , il existe alors  $\gamma \in \mathcal{S}_{piv}$  et  $t' \in \mathbb{R}_+$  tels que  $\gamma(t') \in \mathcal{V}_q$ . Si l'on concatène  $\xi$  avec  $\gamma$  dans cet ordre, on obtient un chemin  $\sigma \in \mathcal{S}_p$  tel que  $\sigma(t + t') \in \mathcal{V}_q$ , et  $t + t' \geq T$ . Cette construction étant faisable quels que soient  $T \in \mathbb{R}_+$  et  $\mathcal{V}_q$ , cela prouve  $q \in \omega_{\Psi}(p)$ . En conclusion :  $\Gamma = \omega_{\Psi}(p)$ .

Pour le dernier point, nous savons que :

$$[x_{min}, x_{max}] \times \{0\} \subseteq \Gamma \cap (\mathbb{R}_+ \times \{0\}) \subseteq M_0^{\mathbf{Y}} = [a, A] \times \{0\}.$$

Soit  $x \in [a, A] \setminus [x_{min}, x_{max}]$ . Si  $x < x_{min}$ , alors  $\inf_{a \leq x' \leq x, i \in \mathcal{E}} F_x^i(x', 0) > 0$ , et si  $x > x_{max}$ , alors  $\sup_{x \leq x' \leq A, i \in \mathcal{E}} F_x^i(x', 0) < 0$ . Ainsi, toute solution  $\rho$  de (ID) sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\rho(0) = (x, 0)$  sort en temps fini du segment  $[a, A] \times \{0\} = M_0^{\mathbf{Y}}$  lorsque l'on remonte le temps. Par conséquent il n'existe pas de solution de (ID) sur  $\mathbb{R}$  passant par  $(x, 0)$  et restant dans  $\Gamma \subseteq M$ . L'invariance de  $\Gamma$  sous  $\Psi$  exclut donc l'appartenance de  $(x, 0)$  à  $\Gamma$ , ce qui prouve le point 7. ■

Ainsi s'achève notre étude des propriétés dynamiques du modèle.

## Et après ?

Nous avons souligné, dans le paragraphe 1.1.1, l'importance de l'hypothèse implicite de « grandes populations » qui est faite dans la modélisation, principalement parce que nous considérons l'aléa comme inexistant à l'échelle de la population et donc utilisons une approximation des grands nombres. Cela a pour effet de rendre toute extinction en temps fini impossible, et de permettre dans les cas **d** et **e** la convergence du processus (en occupation moyenne et en loi) vers la loi invariante  $\Pi \in \mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0)$ . Dans la perspective d'une modélisation plus réaliste, il serait donc naturel d'introduire une composante de stochasticité purement démographique. L'un des problèmes à se poser alors serait de comprendre comment interpréter dans ce cadre les résultats du présent mémoire : quelles sont implicitement les limites d'échelles, etc.

## Remerciements

Je tiens à remercier vivement Vincent Bansaye, pour :

- avoir accepté de m'encadrer ;
- m'avoir proposé ce sujet à la fois original et plein de potentiel ;
- m'avoir laissé une liberté totale dans l'exploration du moment que j'avais !

## Références

- [BBMZ15] M. Benaïm, S. Le Borgne, F. Malrieu, and P.-A. Zitt, *Qualitative properties of certain piecewise deterministic Markov processes*, Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques **51** (2015), 1040–1075.
- [BL16] M. Benaïm and C. Lobry, *Lotka-Volterra with randomly fluctuating environments or "How switching between beneficial environments can make survival harder"*, The Annals of Applied Probability **26** (2016), 3754–3785.
- [Cus80] J. M. Cushing, *Two species competition in a periodic environment*, Journal of Mathematical Biology **10** (1980), 385–400.
- [dMS81] P. de Mottoni and A. Schiaffino, *Competition systems with periodic coefficients : a geometric approach*, Journal of Mathematical Biology **11** (1981), 319–335.
- [Gau32] G. F. Gause, *Experimental studies on the struggle for existence*, Journal of Experimental Biology **9** (1932), 389–402.
- [Hal80] J. K. Hale, *Ordinary differential equations*, R. E. Krieger Publishing Company, 1980.
- [HM11] Martin Hairer and Jonathan Christopher Mattingly, *Yet another look at Harris’ ergodic theorem for Markov chains*, Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications VI, vol. 63, 2011, pp. 109–117.
- [HSD04] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney, *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*, Academic Press, 2004.
- [Koc74] A. L. Koch, *Coexistence resulting from an alternation of density dependent and density independent growth*, Journal of Theoretical Biology **44** (1974), 373–386.
- [LSN94] C. Lobry, A. Sciandra, and P. Nival, *Effets paradoxaux des fluctuations de l’environnement sur la croissance des populations et la compétition entre espèces*, Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série 3, Sciences de la vie **317** (1994), 102–107.
- [Tes12] G. Teschl, *Ordinary differential equations and dynamical systems*, American Mathematical Society, 2012.

## Annexe A Irréductibilité, conditions de Doeblin et critères d'Hörmander

Cette annexe constitue un pilier théorique pour la démonstration des résultats de la partie 3.

### A.1 Irréductibilité

Cette section A.1 est consacrée à quelques notions classiques de la théorie générale des chaînes de Markov. On s'y donne une chaîne  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans un espace mesurable  $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ , de noyau de transition  $P$ . Pour tout  $x \in \mathbb{X}$  on notera  $\mathbb{P}_x$  la loi de la chaîne issue de  $x$ .

**Définition A.1.** L'ensemble  $A \in \mathcal{X}$  est dit **accessible à partir de  $x \in \mathbb{X}$**  s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbb{P}_x(X_n \in A) > 0$ . Il est simplement dit **accessible** s'il est accessible à partir de tout point  $x \in \mathbb{X}$ .

**Définition-Proposition A.2.** On appelle **noyau résolvant** le noyau  $R := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n-1} P^n$ . Il s'agit d'un noyau markovien et pour tout  $A \in \mathcal{X}$ ,  $A$  est accessible si et seulement si  $R(\cdot, A)$  est strictement positive sur  $\mathbb{X}$ .

**Démonstration.** Laissée au lecteur! ■

**Proposition A.3.** Soit  $\pi$  une probabilité sur  $\mathbb{X}$  invariante par le noyau  $P$ . Alors pour tout ensemble  $A \in \mathcal{X}$  accessible,  $\pi(A) > 0$ .

**Démonstration.** Si  $A \in \mathcal{X}$  est accessible,  $R(\cdot, A)$  est strictement positive sur  $\mathbb{X}$  donc  $\pi R(A) > 0$ . Or l'invariance de  $\pi$  par  $P$  entraîne  $\pi R = \pi$ . ■

**Définition A.4.** L'ensemble  $C \in \mathcal{X}$  est un **small-set** pour la chaîne  $(X_n)$  s'il existe  $m \in \mathbb{N}$  et une mesure positive non nulle  $\nu$  sur  $\mathbb{X}$  tels que la **condition de Doeblin** suivante soit vérifiée :

$$\forall x \in C, \quad \mathbb{P}_x(X_m \in \cdot) \geq \nu(\cdot). \quad (45)$$

*Remarque.* Si la condition (45) est vérifiée, on dit que  $C$  est un  $m$ -small-set.

**Définition A.5.** On dit que la chaîne  $(X_n)$  (ou son noyau  $P$ ) est **irréductible** si elle possède un small-set accessible.

**Proposition A.6.** Si  $P$  est irréductible, alors il existe une mesure positive non nulle  $\varphi$  sur  $\mathbb{X}$  telle que pour tout  $A \in \mathcal{X}$ ,  $\varphi(A) > 0$  si et seulement si  $A$  est accessible.

**Démonstration.** Supposons  $P$  irréductible. Alors il existe  $C \in \mathcal{X}$  accessible,  $m \in \mathbb{N}$  et une mesure positive  $\nu$  sur  $\mathbb{X}$  non nulle tels que :

$$\forall x \in C, \quad P^m(x, \cdot) \geq \nu(\cdot).$$

On pose  $\varphi = \nu R$ . Soit  $A \in \mathcal{X}$ . Si  $A$  est accessible, alors  $R(\cdot, A)$  est strictement positive sur  $\mathbb{X}$ , donc  $\nu R(A) = \varphi(A) > 0$ . Réciproquement, si  $\varphi(A) > 0$ , alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\nu P^n(A) > 0$ . De plus

pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $P^k(x, C) > 0$ , d'où :

$$\begin{aligned} P^{k+m+n}(x, A) &\geq \int_{y \in C} P^k(x, dy) \int_{z \in \mathbb{X}} P^m(y, dz) P^n(z, A) \\ &\geq \int_{y \in C} P^k(x, dy) \int_{z \in \mathbb{X}} \nu(dz) P^n(z, A) \\ &\geq P^k(x, C) \nu P^n(A) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Donc  $A$  est accessible. ■

**Corollaire A.7.** *Si  $P$  est irréductible, alors pour tout  $A \in \mathcal{X}$ ,  $A$  ou  $\mathbb{X} \setminus A$  est accessible.*

**Démonstration.** Soit  $\varphi$  donnée par la proposition A.6 :  $\forall A \in \mathcal{X}$ ,  $\varphi(A) + \varphi(\mathbb{X} \setminus A) = \varphi(\mathbb{X}) > 0$ . ■

**Proposition A.8.** *Si  $\pi$  est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{X}$  invariante par  $P$  et que  $P$  est irréductible, alors pour tout  $A \in \mathcal{X}$ ,  $\pi(A) > 0$  si et seulement si  $A$  est accessible.*

**Démonstration.** Le sens inverse est démontré dans la proposition A.3. Soit  $A \in \mathcal{X}$  vérifiant  $\pi(A) > 0$ . Notons  $\tilde{A} = \{x \in \mathbb{X} : R(x, A) > 0\}$  l'ensemble des points pouvant accéder à  $A$ . Si  $x \in \mathbb{X}$  est tel que  $\tilde{A}$  est accessible depuis  $x$ , alors il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $P^m(x, \tilde{A}) > 0$ , et on a :

$$R(x, A) \geq \frac{1}{2^m} P^m R(x, A) \geq \frac{1}{2^m} \int_{y \in \tilde{A}} P^m(x, dy) R(y, A) > 0,$$

donc  $A$  est accessible depuis  $x$ . Par conséquent, il suffit de montrer que  $\tilde{A}$  est accessible, et de plus :

$$\forall x \in \mathbb{X}, \quad x \notin \tilde{A} \Rightarrow R(x, \tilde{A}) = 0.$$

On en déduit :

$$\pi(\tilde{A}) = \pi R(\tilde{A}) = \int_{x \in \tilde{A}} \pi(dx) R(x, \tilde{A}).$$

Or  $\tilde{A} \supseteq A$  donc  $\pi(\tilde{A}) > 0$ . De plus  $R(\cdot, \tilde{A}) \leq 1$ , ce qui entraîne, pour  $\pi$ -presque tout  $x \in \tilde{A}$ , l'égalité  $R(x, \tilde{A}) = 1$  ou, ce qui est équivalent,  $R(x, \mathbb{X} \setminus \tilde{A}) = 0$ . On en déduit que  $\mathbb{X} \setminus \tilde{A}$  n'est pas accessible, donc d'après le corollaire A.7,  $\tilde{A}$  l'est, ce qui conclut. ■

**Proposition A.9.** *Si  $\mu$  est une mesure signée sur  $\mathbb{X}$  invariante par  $P$ , alors ses parties positive  $\mu_+$  et négative  $\mu_-$  (vérifiant  $\mu = \mu_+ - \mu_-$ ) sont également invariantes par  $P$ .*

**Démonstration.** Soient  $X_+, X_- \in \mathcal{X}$  disjoints tels que  $\mu_+$  (resp.  $\mu_-$ ) soit supportée par  $X_+$  (resp.  $X_-$ ). L'invariance de  $\mu$  par  $P$  implique l'égalité :

$$\mu_+ P = \mu_- P + \mu_+ - \mu_-. \tag{46}$$

Les mesures  $\mu_+ P$  et  $\mu_- P$  sont positives de même masse que  $\mu_+$  et  $\mu_-$  respectivement, et pour tout  $A \in \mathcal{X}$ , on a :

$$\mu_+ P(A) \geq \mu_+ P(A \cap X_+) = \mu_- P(A \cap X_+) + \mu_+(A \cap X_+) \geq \mu_+(A).$$

En appliquant ceci également au complémentaire de  $A$ , on en déduit  $\mu_+ P(A) = \mu_+(A)$ . Donc  $\mu_+$  est  $P$ -invariante, et  $\mu_-$  aussi en conséquence de (46). ■

**Théorème A.10.** *Si  $(X_n)$  est irréductible, alors elle possède au plus une probabilité invariante.*

**Démonstration.** Supposons par l'absurde qu'il existe deux probabilités invariantes distinctes  $\pi_0$  et  $\pi_1$ . La mesure signée  $\mu = \pi_0 - \pi_1$  est invariante par  $P$ . D'après la proposition A.9, ses parties positive  $\mu_+$  et négative  $\mu_-$  sont  $P$ -invariantes. Comme  $\mu$  est non nulle,  $\mu_+$  ou  $\mu_-$  est non nulle, et en fait les deux le sont car  $\mu_+(\mathbb{X}) = \mu_-(\mathbb{X})$ . Notons  $\pi_+ = \mu_+/\mu_+(\mathbb{X})$  et  $\pi_- = \mu_-/\mu_-(\mathbb{X})$ . Ces lois sont mutuellement singulières, or la proposition A.8 implique qu'elles sont au contraire mutuellement absolument continues : le théorème est prouvé par l'absurde. ■

## A.2 Conditions de Doeblin, critères d'Hörmander

Il s'agit dans cette section de voir comment on peut obtenir des conditions de Doeblin locales, pour la chaîne  $(\tilde{Z}_n)$  et pour le processus  $(Z_t)$ , à partir de critères géométriques vérifiés par les champs  $F^i, i \in \mathcal{E}$ .

**Lemme A.11.** *Soient  $m \geq n \geq 1$  des entiers et  $f : (\mathbf{t}, p) \mapsto f_p(\mathbf{t})$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $(\mathbb{R}_+^*)^m \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Supposons qu'il existe un couple  $(\mathbf{t}_0, p_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^m \times \mathbb{R}^n$  tel que  $f_{p_0}$  soit une submersion en  $\mathbf{t}_0$ . Soit  $\mathcal{I} \subseteq (\mathbb{R}_+^*)^m$  un voisinage ouvert de  $\mathbf{t}_0$ . Alors on peut trouver un voisinage ouvert  $\mathcal{J}$  de  $p_0$  et un voisinage ouvert  $\mathcal{W}$  de  $f_{p_0}(\mathbf{t}_0)$  tels que pour tout  $p \in \mathcal{J}$ , on ait  $\mathcal{W} \subseteq f_p(\mathcal{I})$ . Si de plus  $T$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $(\mathbb{R}_+^*)^m$ , admettant une densité  $h_T$  bornée inférieurement par  $c_0 > 0$  sur  $\mathcal{I}$ , alors quitte à restreindre  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{W}$ , il existe  $c > 0$  tel que :*

$$\forall p \in \mathcal{J}, \quad \mathbb{P}(f(T, p) \in \cdot, T \in \mathcal{I}) \geq c \ell_{\mathbb{R}^n}(\cdot \cap \mathcal{W}).$$

**Démonstration.** Voir [BBMZ15, Lemma 6.3] ■

Dans la suite, on prendra  $D \in \{M \setminus M_0, M_0^{\mathbf{x}}, M_0^{\mathbf{y}}\}$  et on considérera la dynamique, du processus  $(Z_t)$  ou de la chaîne  $(\tilde{Z}_n)$ , restreinte à  $\mathbf{D} = D \times \mathcal{E}$ . Les frontières  $M_0^{\mathbf{x}}$  et  $M_0^{\mathbf{y}}$  seront vues comme parties d'un espace de dimension 1, autrement dit, on parlera de submersion dans ces espaces pour une application dont la différentielle est de rang 1. Les ouverts seront pris pour la topologie trace sur  $D$ , enfin on notera  $\overrightarrow{M \setminus M_0} = \mathbb{R}^2$ ,  $\overrightarrow{M_0^{\mathbf{x}}} = \{0\} \times \mathbb{R}$  et  $\overrightarrow{M_0^{\mathbf{y}}} = \mathbb{R} \times \{0\}$ .

Dans la proposition suivante, nous donnons un critère permettant d'obtenir une condition de Doeblin pour la chaîne  $(\tilde{Z}_n)$ .

**Proposition A.12.** *Soient  $p \in D$  et  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}_{m, \text{ad}(p)}^+$ , tels que  $\mathbf{v} \mapsto \Phi_{\mathbf{v}}^{\mathbf{i}}(p)$  est une submersion en  $\mathbf{u}$ . Alors il existe un ouvert  $\mathcal{V}$  contenant  $p$ , un ouvert  $\mathcal{W}$  contenant  $\Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p)$  et une constante  $c > 0$  tels que*

$$\forall q \in \mathcal{V}, \quad \mathbb{P}_{q, i_0} [\tilde{Z}_m \in \cdot \times \{i_m\}] \geq c \ell_D(\cdot \cap \mathcal{W}). \quad (47)$$

**Démonstration.** Par continuité de  $(q, \mathbf{v}) \mapsto Q(q, \mathbf{i}, \mathbf{v})$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}_p$  de  $p$  et des constantes  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tels que :

$$\forall q \in \mathcal{V}_p, \quad \forall \mathbf{v} \in (\mathbb{R}_+^*)^m, \quad \max_{1 \leq k \leq m} |v_k - u_k| \leq \delta_1 \Rightarrow Q(q, \mathbf{i}, \mathbf{v}) \geq \delta_2.$$

Notons  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_m)$  et  $\tilde{\mathbf{I}} = (\tilde{I}_0, \dots, \tilde{I}_m)$ . On a pour tout  $q \in \mathcal{V}_p$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{q,i_0} \left[ \tilde{Z}_m \in \cdot \times \{i_m\} \right] &\geq \mathbb{P}_{q,i_0} \left[ \Phi_{\mathbf{U}}^{\mathbf{i}}(q) \in \cdot, \tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{i}, \max_{1 \leq k \leq m} |U_k - u_k| \leq \delta_1 \right] \\ &= \mathbb{E}_{q,i_0} \left[ \mathbf{1}_{\{\Phi_{\mathbf{U}}^{\mathbf{i}}(q) \in \cdot, \max_{1 \leq k \leq m} |U_k - u_k| \leq \delta_1\}} Q(q, \mathbf{i}, \mathbf{U}) \right] \\ &\geq \delta_2 \mathbb{P}_{q,i_0} \left[ \Phi_{\mathbf{U}}^{\mathbf{i}}(q) \in \cdot, \max_{1 \leq k \leq m} |U_k - u_k| \leq \delta_1 \right]. \end{aligned}$$

On peut appliquer le lemme A.11 avec la variable aléatoire  $T = \mathbf{U}$ , la fonction  $f : (\mathbf{v}, q) \mapsto \Phi_{\mathbf{v}}^{\mathbf{i}}(q)$ , le point  $(p, \mathbf{u})$  et le voisinage  $\mathcal{I} = B_{\delta_1}(\mathbf{u}) \cap (\mathbb{R}_+^*)^m$ . En effet la densité de  $\mathbf{U}$ , qui est un produit de fonctions exponentielles décroissantes, est bornée inférieurement par une constante strictement positive sur  $\mathcal{I}$ . On obtient alors l'existence d'ouverts  $\mathcal{J} \ni p$ ,  $\mathcal{W} \ni \Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p)$  et d'une constante  $c > 0$  tels que :

$$\forall q \in \mathcal{J}, \quad \mathbb{P}_{q,i_0} \left[ \Phi_{\mathbf{U}}^{\mathbf{i}}(q) \in \cdot, \max_{1 \leq k \leq m} |U_k - u_k| \leq \delta_1 \right] \geq c \ell_D(\cdot \times \mathcal{W}).$$

En combinant cela avec ce qui précède, on obtient (47) avec  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_p \cap \mathcal{J}$ . ■

La proposition qui suit concerne l'obtention d'une condition de Doeblin pour le processus  $(Z_t)$ .

**Proposition A.13.** *Soient  $p \in D$  et  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}_{m,ad(p)}^+$  tels que  $\mathbf{v} \mapsto \Phi_{t_0-v_1-\dots-v_m}^{i_m} \circ \Phi_{\mathbf{v}}^{\mathbf{i}}(p)$  est une submersion en  $\mathbf{u}$  pour un certain  $t_0 > u_1 + \dots + u_m$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $p$ , un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $\Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p)$  et une constante  $c > 0$  tels que :*

$$\forall q \in \mathcal{V}, \quad \mathbb{P}_{q,i_0} [Z_{t_0} \in \cdot \times \{i_m\}] \geq c \ell_D(\cdot \cap \mathcal{W}). \quad (48)$$

**Démonstration.** Par continuité de  $(q, \mathbf{v}) \mapsto Q(q, \mathbf{i}, \mathbf{v})$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}_p$  de  $p$  et des constantes  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tels que :

$$\forall q \in \mathcal{V}_p, \quad \forall \mathbf{v} \in (\mathbb{R}_+^*)^m, \quad \max_{1 \leq k \leq m} |v_k - u_k| \leq \delta_1 \Rightarrow \begin{cases} Q(q, \mathbf{i}, \mathbf{v}) \geq \delta_2, \\ v_1 + \dots + v_m < s. \end{cases}$$

Notons  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_m)$  et  $\tilde{\mathbf{I}} = (\tilde{I}_0, \dots, \tilde{I}_m)$ , ainsi que  $f : (\mathbf{v}, q) \mapsto \Phi_{t_0-v_1-\dots-v_m}^{i_m} \circ \Phi_{\mathbf{v}}^{\mathbf{i}}(q)$ . L'application partielle  $f(\cdot, p)$  est par hypothèse une submersion en  $\mathbf{u}$ . Pour tout  $q \in \mathcal{V}_p$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{q,i_0} \left[ Z_{t_0} \in \cdot \times \{i_m\} \right] &\geq \mathbb{P}_{q,i_0} \left[ f(\mathbf{U}, q) \in \cdot, \tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{i}, \max_{1 \leq k \leq m} |U_k - u_k| \leq \delta_1, U_{m+1} \geq t_0 \right] \\ &= \mathbb{E}_{q,i_0} \left[ \mathbf{1}_{\{f(\mathbf{U}, q) \in \cdot, \max_{1 \leq k \leq m} |U_k - u_k| \leq \delta_1\}} Q(q, \mathbf{i}, \mathbf{U}) \mathbf{1}_{\{U_{m+1} \geq t_0\}} \right] \\ &\geq \delta_2 e^{-\lambda t_0} \mathbb{P}_{q,i_0} \left[ f(\mathbf{U}, q) \in \cdot, \max_{1 \leq k \leq m} |U_k - u_k| \leq \delta_1 \right]. \end{aligned}$$

On conclut alors comme dans la proposition précédente, en invoquant le lemme A.11. ■

Les conditions de Doeblin obtenues dans les propositions A.12 et A.13 peuvent être considérablement améliorées : elles manquent d'uniformité en l'environnement initial, en l'environnement final, et en ce qui concerne la proposition A.13, en temps. Les lemmes A.14 et A.15 ci-après vont permettre de combler ces manques.



**Lemme A.14.** Soit  $p \in D$ , et  $\mathcal{V}$  un ouvert contenant  $p$ . Alors il existe un ouvert  $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$  contenant  $p$ , et des constantes  $c, \varepsilon > 0$  tels que :

$$\forall q \in \mathcal{V}', \forall i, j \in \mathcal{E}, \quad \begin{cases} \mathbb{P}_{q,i}[\tilde{Z}_{d-1} \in \mathcal{V} \times \{j\}] \geq c, \\ \mathbb{P}_{q,i}[\forall t \in [\varepsilon/2, \varepsilon], Z_t \in \mathcal{V} \times \{j\}] \geq c. \end{cases} \quad (49)$$

**Démonstration.** On note  $C_1 = \sup_{i \in \mathcal{E}, q \in D} \|F^i(q)\|$ . Si l'on choisit  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, l'ouvert

$$\mathcal{V}_\varepsilon := \{q \in D : \text{dist}(q, D \setminus \mathcal{V}) > C_1 \varepsilon\}$$

contiendra  $p$ . Toute trajectoire du processus  $(Z_t)$  issue d'un point de  $\mathcal{V}_\varepsilon$  restera dans l'ouvert  $\mathcal{V}$  sur l'intervalle  $0 \leq t \leq \varepsilon$ . Pour  $i, j \in \mathcal{E}$  donnés, il existe, par irréductibilité et apériodicité de la matrice de transition  $Q(p, j, k)_{1 \leq j, k \leq d}$ , une suite d'environnements  $\mathbf{i} = (i_0 = i, i_1, \dots, i_{d-2}, i_{d-1} = j)$  tels que

$$Q(p, \mathbf{i}, \mathbf{0}) = Q(p, i_0, i_1) \dots Q(p, i_{d-2}, i_{d-1}) > 0.$$

Par continuité de  $(q, \mathbf{u}) \mapsto Q(q, \mathbf{i}, \mathbf{u})$ , il existe  $0 < \delta_1 \leq \varepsilon/(2(d-1))$ ,  $\delta_2 > 0$  et un voisinage ouvert  $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}_\varepsilon$  de  $p$  tels que

$$\forall q \in \mathcal{V}', \forall \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{d-1}) \in (\mathbb{R}_+)^{d-1}, \quad \max_{1 \leq k \leq d-1} u_k \leq \delta_1 \Rightarrow Q(q, \mathbf{i}, \mathbf{u}) \geq \delta_2.$$

En posant  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_{d-1})$  et  $\tilde{\mathbf{I}} = (\tilde{I}_0, \dots, \tilde{I}_{d-1})$ , on a alors pour tout  $q \in \mathcal{V}'$  :

$$\begin{aligned} & \min(\mathbb{P}_{q,i}[\tilde{Z}_{d-1} \in \mathcal{V} \times \{j\}], \mathbb{P}_{q,i}[\forall t \in [\varepsilon/2, \varepsilon], Z_t \in \mathcal{V} \times \{j\}]) \\ & \geq \mathbb{P}_{q,i}[U_1 + \dots + U_{d-1} \leq \varepsilon/2, \tilde{I}_{d-1} = j, U_d \geq \varepsilon] \\ & \geq \mathbb{P}_{q,i}[\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{i}, \max_{1 \leq k \leq d-1} U_k \leq \delta_1, U_d \geq \varepsilon] \\ & = \mathbb{E}_{q,i}[\mathbf{1}_{\{\max_{1 \leq k \leq d-1} U_k \leq \delta_1\}} Q(q, \mathbf{i}, \mathbf{U}) \mathbf{1}_{\{U_d \geq \varepsilon\}}] \\ & \geq \delta_2 (1 - e^{-\lambda \delta_1})^{d-1} e^{-\lambda \varepsilon}. \end{aligned}$$

Ce dernier terme est une fonction  $c(i, j)$  au travers de  $\delta_1$  et  $\delta_2$ . La proposition est vérifiée avec  $c = \min_{i, j \in \mathcal{E}} c(i, j) > 0$ . ■

**Lemme A.15.** Soient  $p \in D$ ,  $\mathcal{W}$  un ouvert de  $D$  contenant  $p$ , et  $i \in \mathcal{E}$ . Alors il existe  $c > 0$ , un ouvert  $\mathcal{W}'$  de  $D$  contenant  $p$ , un instant  $t_f \geq 0$  et un entier  $m_f$  tels que

$$\begin{aligned} (\ell_D(\cdot \cap \mathcal{W}) \otimes \delta_i) \tilde{P}^{m_f} & \geq c \ell_{\mathbf{D}}(\cdot \cap \mathcal{W}' \times \mathcal{E}), \\ (\ell_D(\cdot \cap \mathcal{W}) \otimes \delta_i) P_{t_f} & \geq c \ell_{\mathbf{D}}(\cdot \cap \mathcal{W}' \times \mathcal{E}). \end{aligned}$$

**Démonstration.** Voir [BBMZ15, Lemma 6.8] ■

Au moyen des lemmes précédents, nous pouvons améliorer les conditions de Doeblin obtenues dans les propositions A.12 et A.13 : c'est ce que nous faisons dans les théorèmes A.16 et A.17 respectivement.

**Théorème A.16.** Soient  $p \in D$  et  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}_{m, ad(p)}^+$ , tels que  $\mathbf{v} \mapsto \Phi_{\mathbf{v}}^{\mathbf{i}}(p)$  est une submersion en  $\mathbf{u}$ . Alors il existe un ouvert  $\mathcal{V}$  contenant  $p$ , un ouvert  $\mathcal{W}$  contenant  $\Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p)$ , un entier  $n$  et une constante  $c > 0$  tels que :

$$\forall q \in \mathcal{V}, \forall i \in \mathcal{E}, \quad \mathbb{P}_{q,i}[\tilde{Z}_n \in \cdot] \geq c \ell_{\mathbf{D}}(\cdot \cap \mathcal{W} \times \mathcal{E}). \quad (50)$$

**Démonstration.** La proposition A.12 nous fournit un ouvert  $\mathcal{V}_1$  contenant  $p$ , un ouvert  $\mathcal{W}_1$  contenant  $\Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p)$  et une constante  $c_1 > 0$  tels que :

$$\forall q \in \mathcal{V}_1, \quad \mathbb{P}_{q,i_0} [\tilde{Z}_m \in \cdot \times \{i_m\}] \geq c_1 \ell_D(\cdot \cap \mathcal{W}_1).$$

En appliquant le lemme A.14, on obtient l'existence d'un ouvert  $\mathcal{V}$  contenant  $p$  et d'une constante  $c_2 > 0$  tels que :

$$\forall q \in \mathcal{V}, \forall i \in \mathcal{E}, \quad \mathbb{P}_{q,i}(\tilde{Z}_{d-1} \in \mathcal{V}_1 \times \{i_0\}) \geq c_2.$$

Le lemme A.15 fournit quant à lui une constante  $c_3 > 0$ , un ouvert  $\mathcal{W}$  contenant  $\Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p)$  et un entier  $m_f$  tels que :

$$\left( \ell_D(\cdot \cap \mathcal{W}_1) \otimes \delta_{i_m} \right) \tilde{P}^{m_f} \geq c_3 \ell_{\mathbf{D}}(\cdot \cap \mathcal{W} \times \mathcal{E}).$$

En combinant ces trois résultats, on obtient :

$$\forall q \in \mathcal{V}, \forall i \in \mathcal{E}, \quad \mathbb{P}_{q,i}(\tilde{Z}_{d-1+m+m_f} \in \cdot) \geq c_2 c_1 c_3 \ell_{\mathbf{D}}(\cdot \cap \mathcal{W} \times \mathcal{E}). \quad \blacksquare$$

**Théorème A.17.** Soient  $p \in M$  et  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}_{m,ad(p)}^+$  tels que  $\mathbf{v} \mapsto \Phi_{t_0-v_1-\dots-v_m}^{i_m} \circ \Phi_{\mathbf{v}}^{\mathbf{i}}(p)$  est une submersion en  $\mathbf{u}$  pour un certain  $t_0 > u_1 + \dots + u_m$ . Alors il existe des instants  $t_2 > t_1 \geq t_0$ , un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $p$ , un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $\Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p)$  et une constante  $c > 0$  tels que

$$\forall q \in \mathcal{V}, \forall i \in \mathcal{E}, \forall t \in [t_1, t_2], \quad \mathbb{P}_{q,i} [Z_t \in \cdot] \geq c \ell_{\mathbf{D}}(\cdot \cap \mathcal{W} \times \mathcal{E}). \quad (51)$$

**Démonstration.** La proposition A.13 nous fournit un voisinage ouvert  $\mathcal{V}_1$  de  $p$ , un voisinage  $\mathcal{W}_1$  de  $\Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p)$  et une constante  $c_1 > 0$  tels que

$$\forall q \in \mathcal{V}_1, \quad \mathbb{P}_{q,i_0} [Z_{t_0} \in \cdot \times \{i_m\}] \geq c_1 \ell_D(\cdot \cap \mathcal{W}_1).$$

En appliquant le lemme A.14, on obtient l'existence d'un ouvert  $\mathcal{V}$  contenant  $p$  et d'une constante  $c_2 > 0$  tels que :

$$\forall q \in \mathcal{V}, \forall i \in \mathcal{E}, \quad \mathbb{P}_{q,i}(\forall t \in [\varepsilon/2, \varepsilon], Z_t \in \mathcal{V}_1 \times \{i_0\}) \geq c_2.$$

La combinaison de ces deux résultats au moyen de la propriété de Markov donne :

$$\begin{aligned} \forall q \in \mathcal{V}, \forall t \in [t_0 + \varepsilon/2, t_0 + \varepsilon], \forall i \in \mathcal{E}, \quad & \mathbb{P}_{q,i}(Z_t \in \cdot \times \{i_m\}) \\ & \geq \mathbb{E}_{q,i} \left[ \mathbf{1}_{\{Z_{t-t_0} \in \mathcal{V}_1 \times \{i_0\}\}} \mathbb{P}_{Z_{t-t_0}}(Z_{t_0} \in \cdot \times \{i_m\}) \right] \\ & \geq c_2 c_1 \ell_D(\cdot \cap \mathcal{W}_1). \end{aligned}$$

Le lemme A.15 fournit quant à lui une constante  $c_3 > 0$ , un ouvert  $\mathcal{W}$  contenant  $\Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p)$  et un temps  $t_f$  tels que :

$$\left( \ell_M(\cdot \cap \mathcal{W}_1) \otimes \delta_{i_m} \right) P_{t_f} \geq c_3 \ell_{\mathbf{D}}(\cdot \cap \mathcal{W} \times \mathcal{E}).$$

Finalement, on obtient :

$$\forall q \in \mathcal{V}, \forall t \in [t_0 + \varepsilon/2 + t_f, t_0 + \varepsilon + t_f], \forall i \in \mathcal{E}, \quad \mathbb{P}_{q,i}(Z_t \in \cdot) \geq c_2 c_1 c_3 \ell_{\mathbf{D}}(\cdot \cap \mathcal{W} \times \mathcal{E}). \quad \blacksquare$$

Les théorèmes A.16 et A.17 conservent l'inconvénient d'être difficilement utilisables si l'on ne sait pas calculer les flots  $\Phi^i, i \in \mathcal{E}$ . Dans la suite nous allons donner des critères faisant intervenir directement les champs  $F^i$ , suffisants pour obtenir les conclusions desdits théorèmes.

**Définition A.18.** Soient les collections de champs  $\mathcal{A}_0 := \{F^i, i \in \mathcal{E}\}$  et  $\mathcal{B}_0 := \{F^i - F^j, i, j \in \mathcal{E}\}$ . On définit inductivement  $\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  en posant, pour  $\mathcal{C} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$  :

$$\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_{k-1} \cup \{[F^i, V], V \in \mathcal{C}_{k-1}\},$$

où  $[\cdot, \cdot]$  désigne le crochet de Lie des champs de vecteurs. Pour tout  $p \in M$  nous noterons  $\mathcal{C}_k(p)$  l'espace vectoriel engendré par les  $V(p)$  pour  $V \in \mathcal{C}_k$ .

On dit que le point  $p \in D$  satisfait le **critère faible (resp. fort) d'Hörmander** s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{A}_k(p) = \vec{D}$  (resp.  $\mathcal{B}_k(p) = \vec{D}$ ).

*Remarque.* Le critère fort implique le faible car  $\mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{A}_k$  pour tous  $k \in \mathbb{N}$ .

**Théorème A.19.** Si  $p \in D$  vérifie le critère faible (resp. fort) d'Hörmander, alors il existe  $(\mathbf{i}, \mathbf{u})$  (resp.  $(\mathbf{i}, \mathbf{u})$  et  $t_0$ ) vérifiant les hypothèses du théorème A.16 (resp. A.17). Par conséquent la conclusion dudit théorème est vérifiée.

**Démonstration.** Voir [BBMZ15, Section 7], où il est démontré que le critère faible (resp. fort) d'Hörmander en  $p \in D$  donne l'existence de  $(\mathbf{i}, \mathbf{u})$  dans  $\mathbb{T}_m$  (resp.  $(\mathbf{i}, \mathbf{u})$  dans  $\mathbb{T}_m$  et  $t_0 > u_1 + \dots + u_m$ ) tel que  $\mathbf{v} \mapsto \Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p)$  (resp.  $\mathbf{v} \mapsto \Phi_{t_0 - u_1 - \dots - u_m}^{i_m} \Phi_{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}(p)$ ) est une submersion. Par irréductibilité, on peut supposer  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}_{m, ad(p)}$  quitte à ajouter des transitions instantanées. Enfin, comme l'application rang est semi-continue inférieurement, quitte à bouger légèrement  $\mathbf{u}$ , on peut supposer  $u_1, \dots, u_m > 0$ . Cela conclut. ■

Nous poursuivons en donnant des conséquences utiles de la vérification des critères d'Hörmander au niveau de points accessibles.

**Théorème A.20.** Supposons qu'il existe  $p \in D$  accessible depuis tous les points de  $D$  et vérifiant le critère faible d'Hörmander. Alors la chaîne  $(\tilde{Z}_n)$  sur  $\mathbf{D}$  possède au plus une loi invariante, qui si elle existe est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\ell_{\mathbf{D}}$ . Il en va de même pour le processus  $(Z_t)$  sur  $\mathbf{D}$ .

**Démonstration.** D'après le théorème A.19, la conclusion du théorème A.16 est vérifiée : il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $p$ , un ouvert non vide  $\mathcal{W}$ , un entier  $n$  et une constante  $c > 0$  tels que

$$\forall (q, i) \in \mathcal{V} \times \mathcal{E}, \quad \mathbb{P}_{q,i} [\tilde{Z}_n \in \cdot] \geq c \ell_{\mathbf{D}}(\cdot \cap \mathcal{W} \times \mathcal{E}). \quad (50)$$

L'ouvert  $\mathcal{V} \times \mathcal{E}$  est donc un small-set pour la chaîne  $(\tilde{Z}_n)$ . L'accessibilité de  $p$  depuis tous les points de  $D$  fait donc de  $\mathcal{V} \times \mathcal{E}$  un small-set accessible pour la chaîne  $(\tilde{Z}_n)$  sur  $\mathbf{D}$ , d'où son irréductibilité et donc l'unicité d'une éventuelle loi invariante d'après le théorème A.10.

Supposons qu'il existe  $\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{P}}_{inv}(\mathbf{D})$ . D'après la proposition A.3, l'accessibilité de  $\mathcal{V} \times \mathcal{E}$  entraîne  $\tilde{\pi}(\tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{E}) > 0$ . Pour tout borélien  $B \subseteq \mathbf{D}$ , on a en utilisant (50) :

$$\tilde{\pi}(A) = \tilde{\pi} \tilde{P}^m(A) \geq \int_{z \in \tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{E}} \tilde{\pi}(dz) \tilde{P}^m(z, A) \geq \tilde{\pi}(\tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{E}) c \ell_{\mathbf{D}}(A \cap \tilde{\mathcal{W}} \times \mathcal{E}).$$

Ceci implique que  $\tilde{\pi}$  possède une partie absolument continue par rapport à  $\ell_{\mathbf{D}}$  qui est non nulle. Comme la loi invariante sur  $\mathbf{D}$  est unique, la proposition 2.17 montre que  $\tilde{\pi}$  est absolument continue par rapport à  $\ell_{\mathbf{D}}$ .

Les ensembles  $\tilde{\mathcal{P}}_{inv}(\mathbf{D})$  et  $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{D})$  étant en correspondance via des homéomorphismes préservant l'absolue continuité par rapport à  $\ell_{\mathbf{D}}$  (propositions 2.12 et 2.16), l'assertion finale du théorème est vérifiée. ■

La proposition suivante concerne l'extension de la condition de Doeblin pour le processus  $(Z_t)$ , partant d'une condition locale.

**Proposition A.21.** *Supposons qu'il existe  $p \in D$ , accessible depuis tous les points de  $D$  et vérifiant le critère fort d'Hörmander. Alors existe un ouvert non vide  $\mathcal{W}$  de  $D$ , tel que pour tout compact  $\mathcal{K} \subseteq D$ , on puisse trouver  $c_{\mathcal{K}}, t_{\mathcal{K}}, r_{\mathcal{K}} > 0$  tels que :*

$$\forall (q, i) \in \mathcal{K} \times \mathcal{E}, \forall t \in [t_{\mathcal{K}}, t_{\mathcal{K}} + r_{\mathcal{K}}], \quad \mathbb{P}_{q,i}[Z_t \in \cdot] \geq c_{\mathcal{K}} \ell_{\mathbf{D}}(\cdot \cap \mathcal{W} \times \mathcal{E}). \quad (52)$$

**Démonstration.** D'après le théorème A.19, la conclusion du théorème A.17 est vérifiée. En modifiant légèrement les notations, on obtient l'existence de  $t_0, r_0, c_0 > 0$ , d'un ouvert  $\mathcal{V}$  contenant  $p$  et d'un ouvert non vide  $\mathcal{W}$  de  $D$  tels que :

$$\forall q \in \mathcal{V}, \forall i \in \mathcal{E}, \forall t \in [t_0, t_0 + r_0], \quad \mathbb{P}_{q,i}[Z_t \in \cdot] \geq c_0 \ell_{\mathbf{D}}(\cdot \cap \mathcal{W} \times \mathcal{E}). \quad (53)$$

Pour abréger, notons  $\nu_0(\cdot) = \ell_{\mathbf{D}}(\cdot \cap \mathcal{W} \times \mathcal{E})$ . Soit  $z_0$  quelconque dans  $\mathcal{W}$ . Quitte à agrandir le compact  $\mathcal{K}$ , on peut supposer  $z_0 \in \mathcal{K}$ . Posons, pour tous  $t \geq 0$  et  $\delta > 0$  :

$$\mathcal{O}(t, \delta) = \{z \in \mathbf{D} : P_t(z, \mathcal{V} \times \mathcal{E}) > \delta\}.$$

Le caractère Fellerien du semi groupe  $(P_t)$  nous dit que  $z \mapsto P_t(z, \cdot)$  est continue pour la topologie étroite, donc d'après le théorème de Portmanteau les  $\mathcal{O}(t, \delta)$  sont des ouverts. L'accessibilité de  $p \in \mathcal{V} \times \mathcal{E}$  depuis tous les points de  $D$  implique que  $D = \cup_{t \geq 0, \delta > 0} \mathcal{O}(t, \delta)$ . Ensuite, par compacité de  $\mathcal{K}$ , il existe  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$  et  $\delta_1, \dots, \delta_m > 0$  tels que  $\mathcal{K} \subseteq \cup_{k=1}^m \mathcal{O}(t_k, \delta_k)$ . Notons  $\delta = \min(\delta_k)$  et  $V_k = \mathcal{O}(t_k, \delta_k)$ ,  $1 \leq k \leq m$ . Soit  $\ell \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $z_0 \in V_\ell$ . Choisissons un entier  $N \geq (t_m - t_1)/r_0$  et notons  $r_k = (t_m - t_k)/N \leq r_0$ . Alors :

$$\forall k \in \{1, \dots, m\}, \quad t_k + N(t_0 + r_k) + Nt_\ell = Nt_0 + t_m + Nt_\ell,$$

durée indépendante de  $k$  que l'on note  $\tau$ . Fixons  $k \in \{1, \dots, m\}$  et posons successivement  $\tau_1 = t_k$ , puis pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\tau_{2n} = \tau_{2n-1} + t_0 + r_k$ , et  $\tau_{2n+1} = \tau_{2n} + t_\ell$ . Par construction,  $\tau_{2N+1} = \tau$ . Si l'on démarre un processus  $(Z_t)$  en  $z \in V_k$ , alors en notant  $Z^{(i)} = Z_{\tau_i}$ , on a :

$$\mathbb{P}_z(Z_\tau \in \mathcal{V} \times \mathcal{E}) \geq \mathbb{P}_z \left( Z^{(1)} \in \mathcal{V} \times \mathcal{E}, Z^{(2)} \in V_\ell, Z^{(3)} \in \mathcal{V} \times \mathcal{E}, Z^{(4)} \in V_\ell, \dots, Z^{(2N+1)} \in \mathcal{V} \times \mathcal{E} \right).$$

Maintenant, en utilisant de façon répétée le caractère markovien de  $(Z_t)$ , la définition des  $\mathcal{O}(t_k, \delta_k)$  et l'équation (53), cette inégalité entraîne que  $\mathbb{P}_z(Z_\tau \in \mathcal{V} \times \mathcal{E}) \geq (\delta c_0 \nu_0(V_\ell))^N \delta$ . Par conséquent :

$$\forall z \in \mathcal{K}, \forall t \in [t_0, t_0 + r_0], \quad \mathbb{P}_z(Z_{\tau+t} \in \cdot) \geq (\delta c_0 \nu_0(V_\ell))^N \delta c_0 \nu_0(\cdot).$$

Ceci démontre (52) avec  $t_{\mathcal{K}} = \tau + t_0$ ,  $r_{\mathcal{K}} = r_0$  et  $c_{\mathcal{K}} = (\delta c_0 \nu_0(V_\ell))^N \delta c_0$ . On a bien  $\nu_0(V_\ell) > 0$  car  $V_\ell$  est un voisinage de  $z_0 \in \mathcal{W}$ . ■

## Annexe B Preuves diverses

Dans cette annexe sont regroupées un certain nombre de démonstrations que nous avons préféré reporter ici dans le but d'alléger une première lecture.

**Proposition 1.1.** *Pour tout  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ , il existe  $0 < x_{\mathbf{h}} < A$  et une fonction lisse  $g_{\mathbf{h}} : [0, x_{\mathbf{h}}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ , nulle en  $x_{\mathbf{h}}$  et strictement décroissante, telle que  $\text{iso}_{\mathbf{h}}$  soit égale au graphe de  $g_{\mathbf{h}}$ .*

**Démonstration.** Les hypothèses (H1) et (H3) (voir le paragraphe 1.1.1) impliquent l'existence de  $0 < x_{\mathbf{h}} < A$  tel que  $H_{\mathbf{h}}(x_{\mathbf{h}}, 0) = 0$ . Pour tout  $0 \leq x \leq x_{\mathbf{h}}$ , on a  $H_{\mathbf{h}}(x, 0) \geq 0$  en raison du point (H2). Le point (H3) entraîne alors l'existence de  $0 \leq g_{\mathbf{h}}(x) < A$  tel que  $H_{\mathbf{h}}(x, g_{\mathbf{h}}(x)) = 0$ . En conséquence du point (H2), on a :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \begin{cases} \text{sgn}(H_{\mathbf{h}}(x, y)) = \text{sgn}(g_{\mathbf{h}}(x) - y) & \text{si } 0 \leq x \leq x_{\mathbf{h}}, \\ H_{\mathbf{h}}(x, y) < 0 & \text{si } x > x_{\mathbf{h}}. \end{cases}$$

L'isocline  $\text{iso}_{\mathbf{h}}$  est donc égale au graphe de  $g_{\mathbf{h}}$ . D'après le théorème des fonctions implicites,  $g_{\mathbf{h}}$  est une fonction lisse, de dérivée donnée par :

$$g'_{\mathbf{h}}(x) = -\frac{\partial_x H_{\mathbf{h}}(x, g_{\mathbf{h}}(x))}{\partial_y H_{\mathbf{h}}(x, g_{\mathbf{h}}(x))} < 0,$$

pour tout  $0 \leq x \leq x_{\mathbf{h}}$ . ■

**Proposition 1.2.** *Posons  $M = [0, A]^2 \setminus [0, a]^2$ . Si  $(X_0, Y_0) = (x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , alors  $(X_t, Y_t) \in M$  à partir d'un certain temps.*

**Démonstration.** Voir Si  $(x_0, y_0) \in [0, a]^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , alors on a :

$$\forall (x, y) \in [x_0, a] \times [y_0, a], \quad \forall i \in \mathcal{E}, \quad \begin{cases} F_x^i(x, y) \geq x_0 \varepsilon_{\mathbf{x}, a}, \\ F_y^i(x, y) \geq y_0 \varepsilon_{\mathbf{y}, a}. \end{cases}$$

Ainsi, le processus  $(X_t, Y_t)$  issu de  $(x_0, y_0)$  pénétrera dans le domaine  $(\mathbb{R}_+)^2 \setminus [0, a]^2$  avant l'instant

$$t_0 = \min \left( \frac{a - x_0}{x_0 \varepsilon_{\mathbf{x}, a}}, \frac{a - y_0}{y_0 \varepsilon_{\mathbf{y}, a}} \right) < +\infty.$$

Ce domaine est positivement invariant par tous les flots car les champs  $F^i$  sont tous entrants au niveau de la portion de frontière  $(\{a\} \times [0, a]) \cup ([0, a] \times \{a\})$ .

D'autre part, si  $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus [0, A]^2$ , alors on a

$$\forall (x, y) \in [0, x_0] \times [0, y_0] \setminus [0, A]^2, \quad \forall i \in \mathcal{E}, \quad \begin{cases} F_x^i(x, y) \leq -A \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{x}}, \\ F_y^i(x, y) \leq -A \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{y}}, \end{cases}$$

où on a noté pour tout  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$  :

$$\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{h}} = \inf_{(x, y) \in (\{A\} \times [0, A]) \cup ([0, A] \times \{A\}), i \in \mathcal{E}} (-H_{\mathbf{h}}(x, y, i)) > 0.$$

Cela implique que le processus  $(X_t, Y_t)$  issu de  $(x_0, y_0)$  pénétrera dans  $[0, A]^2$  avant l'instant

$$t_1 = \max \left( \frac{x_0 - A}{A\varepsilon_{\mathbf{x}}}, \frac{y_0 - A}{A\varepsilon_{\mathbf{y}}} \right) < +\infty.$$

Le domaine  $[0, A]^2$  est également positivement invariant par les flots, donc  $M$  aussi, ce qui conclut. ■

**Proposition 1.11.** *Soit  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Pour tout  $u > 0$ , on se donne des taux de saut  $(\lambda_{j,k}^u)_{j,k \in \mathcal{E}, j \neq k}$  indépendants des tailles de populations, vérifiant :*

$$\lambda_{j,k}^u = \begin{cases} u & \text{si } j = i, \\ 1 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Pour tout  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ , on note  $\mu_{\mathbf{h}}^u$  l'unique loi invariante sur  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$  pour le processus  $(Z_t)$  associé aux taux de saut  $\lambda_{j,k}^u$ . Alors :

$$\mu_{\mathbf{h}}^u \xrightarrow{u \rightarrow 0} \begin{cases} \delta_{(x_i, 0)} \otimes \delta_i & \text{si } \mathbf{h} = \mathbf{y}, \\ \delta_{(0, y_i)} \otimes \delta_i & \text{si } \mathbf{h} = \mathbf{x}, \end{cases}$$

étroitement. En particulier :

$$\Lambda_{\mathbf{y}}^u = \mu_{\mathbf{y}}^u(H_{\mathbf{y}}) \xrightarrow{u \rightarrow 0} H_{\mathbf{y}}(x_i, 0, i) < 0 \quad \text{et} \quad \Lambda_{\mathbf{x}}^u = \mu_{\mathbf{x}}^u(H_{\mathbf{x}}) \xrightarrow{u \rightarrow 0} H_{\mathbf{x}}(0, y_i, i) > 0.$$

**Démonstration.** Pour tout  $u > 0$ , on notera  $\mathcal{L}^u$  le générateur du processus  $(Z_t)$  associé aux taux de saut  $\lambda_{j,k}^u$ . On suppose  $\mathbf{h} = \mathbf{y}$ , l'autre cas étant identique. Tout d'abord, montrons que

$$\mu_{\mathbf{y}}^u(M_0^{\mathbf{y}} \times \{i\}) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 1. \quad (54)$$

Soit  $u > 0$ . En appliquant le générateur  $\mathcal{L}^u$  à la fonction  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{M})$  définie par  $f(x, y, j) = \mathbf{1}_{\{j=i\}}$ , on obtient d'après l'équation 7 de la proposition 1.7 :

$$\forall x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, \forall j \in \mathcal{E}, \quad \mathcal{L}^u f(x, 0, j) = \begin{cases} -\sum_{k \neq i} \lambda_{i,k} = -u(d-1) & \text{si } j = i, \\ \lambda_{j,i} = 1 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

En appliquant la mesure  $\mu_{\mathbf{y}}^u$  à cette égalité, on obtient :

$$0 = \mu_{\mathbf{y}}^u \mathcal{L}^u f = -u(d-1) \mu_{\mathbf{y}}^u(M_0^{\mathbf{y}} \times \{i\}) + \mu_{\mathbf{y}}(M_0^{\mathbf{y}} \times \mathcal{E} \setminus \{i\}),$$

d'où  $\mu_{\mathbf{y}}(M_0^{\mathbf{y}} \times \{i\}) = 1/(1 + u(d-1))$ , et donc (54) est vérifiée.

Fixons  $\varepsilon > 0$ . Soit  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{M})$  la fonction définie par  $g(x, y, j) \mapsto (x - x_i)^2 \mathbf{1}_{\{j=i\}}$ , on a :

$$\forall x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, \forall j \in \mathcal{E}, \quad \mathcal{L}^u g(x, 0, j) = 2(x - x_i) F_x^i(x, 0) \mathbf{1}_{\{j=i\}} + \begin{cases} -u(d-1)g(x, 0, i) & \text{si } j = i, \\ g(x, 0, i) & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Pour tout  $j \in \mathcal{E}$ , abrégeons  $\mu_{\mathbf{y},j}(dx \times \{0\} \times \{j\})$  en  $\mu_{\mathbf{y},j}(dx)$ . Rappelons aussi que  $M_0^{\mathbf{y}} = [a, A] \times \{0\}$ . En appliquant  $\mu_{\mathbf{y}}$  à l'identité ci-dessus, on finit par obtenir :

$$2 \int_{[a,A]} (x_i - x) F_x^i(x, 0) \mu_{\mathbf{y},i}^u(dx) = -(d-1)u \int_{[a,A]} g(x, 0, i) \mu_{\mathbf{y},i}^u(dx) + \int_{[a,A]} g(x, 0, i) \mathbf{1}_{\{j \neq i\}} \mu_{\mathbf{y},j}^u(dx).$$

L'intégrande du terme de gauche est partout positif, et nul en  $x = x_i$  uniquement. En notant

$$\iota(\varepsilon) = \inf_{a \leq x \leq A, |x - x_i| \geq \varepsilon} ((x_i - x)F^i(x, 0)) \in \mathbb{R}_+^*,$$

on a :

$$\mu_{\mathbf{y}}^u[(M_0^{\mathbf{y}} \setminus B_\varepsilon(x_i, 0)) \times \{i\}] \leq \frac{((d-1)u + [1 - \mu_{\mathbf{y}}^u(M_0^{\mathbf{y}} \times \{i\})])\|g\|_\infty}{2 \iota(\varepsilon)} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0. \quad (55)$$

En combinant (54) et (55), on obtient

$$\mu_{\mathbf{y}}^u(B_\varepsilon(x_i, 0) \times \{i\}) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1.$$

Cela conclut la proposition pour  $\mathbf{h} = \mathbf{y}$ , car la convergence en probabilité implique la convergence en loi.  $\blacksquare$

**Proposition 1.12.** *Soient  $i, i' \in \mathcal{E}$  distincts et  $s \in ]0, 1[$ . Alors le champ moyen  $\bar{F} := sF^i + (1-s)F^{i'}$  possède un unique équilibre sur  $M_0^{\mathbf{y}}$  (resp.  $M_0^{\mathbf{x}}$ ), que l'on note  $(\bar{x}, 0)$  (resp.  $(0, \bar{y})$ ). Pour tout  $u > 0$ , si l'on se donne des taux de saut  $(\lambda_{j,k}^u)_{j,k \in \mathcal{E}, j \neq k}$  indépendants des tailles de populations, vérifiant :*

$$\lambda_{j,k}^u = \begin{cases} (1-s)u & \text{si } j = i \text{ et } k = i', \\ su & \text{si } j = i' \text{ et } k = i, \\ 1 & \text{si } j \in \mathcal{E} \text{ et } k \notin \{i, i'\}, \\ u^2 & \text{si } j \notin \{i, i'\} \text{ et } k \in \{i, i'\}, \end{cases}$$

et que l'on note  $\mu_{\mathbf{y}}^u$  (resp.  $\mu_{\mathbf{x}}^u$ ) l'unique loi invariante sur  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}$  (resp.  $\mathbf{M}_0^{\mathbf{x}}$ ) pour le processus  $(Z_t)$  associé aux taux de saut  $\lambda_{j,k}^u$ , alors pour tout  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ , on a pour la topologie étroite :

$$\mu_{\mathbf{h}}^u \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} \begin{cases} \delta_{(\bar{x}, 0)} \otimes (s\delta_i + (1-s)\delta_{i'}) & \text{si } \mathbf{h} = \mathbf{y}, \\ \delta_{(0, \bar{y})} \otimes (s\delta_i + (1-s)\delta_{i'}) & \text{si } \mathbf{h} = \mathbf{x}. \end{cases}$$

**Démonstration.** On se restreint au cas  $\mathbf{h} = \mathbf{y}$ , l'autre étant identique. Le champ moyen  $\bar{F}$  vérifie  $\bar{F}_x(a, 0) > 0$ ,  $\bar{F}_x(A, 0) > 0$  et  $\partial_x \bar{F}_x(x, 0) < 0$  pour tout  $x \in [a, A]$ , donc il existe un unique  $\bar{x} \in [a, A]$  tel que  $\bar{F}_x(\bar{x}, 0) = 0$ .

Dans la suite on supposera sans perte de généralité que  $i = 1$  et  $i' = 2$ . Pour tout  $u > 0$ , on note  $\mathcal{L}^u$  le générateur du processus  $(Z_t)$  associé aux taux de saut  $\lambda_{j,k}^u$ . En appliquant, à gauche de la fonction  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{M})$  définie par  $f(x, y, j) = \mathbf{1}_{\{j=1\}}$ , le générateur  $\mathcal{L}^u$ , suivi de la mesure  $\mu_{\mathbf{y}}^u$ , on obtient :

$$0 = \mu_{\mathbf{y}}^u \mathcal{L}^u f = -((1-s)u + (d-2))\mu_{\mathbf{y}}^u(M_0^{\mathbf{y}} \times \{1\}) + su\mu_{\mathbf{y}}^u(M_0^{\mathbf{y}} \times \{2\}) + u^2\mu_{\mathbf{y}}^u(M_0^{\mathbf{y}} \times (\mathcal{E} \setminus \{1, 2\})).$$

Notons  $m_1^u = \mu_{\mathbf{y}}^u(M_0^{\mathbf{y}} \times \{1\})$  et  $m_2^u = \mu_{\mathbf{y}}^u(M_0^{\mathbf{y}} \times \{2\})$ . Si l'on applique aussi ce qui précède en échangeant 1 et 2, on obtient le système :

$$\begin{cases} -((1-s)u + (d-2))m_1^u + su m_2^u + u^2(1 - m_1^u - m_2^u) = 0, \\ -(su + (d-2))m_2^u + (1-s)u m_1^u + u^2(1 - m_1^u - m_2^u) = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(L1)} \\ \text{(L2)} \end{matrix}$$

Comme  $m_1^u$ ,  $m_2^u$  et  $m_1^u + m_2^u$  sont des probabilités, à valeurs dans  $[0, 1]$ , la ligne (L1) entraîne :

$$0 \leq (1 - m_1^u - m_2^u) \leq \frac{u + (d-2)}{u^2},$$

et donc  $m_1^u + m_2^u \rightarrow 1$  quand  $u \rightarrow +\infty$ . En utilisant ensuite l'égalité des deux lignes, on trouve :

$$m_1^u = \frac{2su + (d-2)}{2u + 2(d-2)} (m_1^u + m_2^u) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} s, \quad \text{puis} \quad m_2^u \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 1 - s.$$

On voit aussi qu'e si l'on supposait par l'absurde  $m_1^1 = 0$ , la première égalité ci-dessus impliquerait  $m_2^u = 0$  et donc, d'après (L1),  $u^2 = 0$ , ce qui est une contradiction. Donc  $m_1^u$  et  $m_2^u$  sont non nulles pour tout  $u > 0$ , ce qui nous permet de définir les lois de probabilité  $\nu_{\mathbf{y},1}^u := \mu_{\mathbf{y}}^u(\cdot \times \{1\})/m_1^u$  et  $\nu_{\mathbf{y},2}^u := \mu_{\mathbf{y}}^u(\cdot \times \{2\})/m_2^u$ .

Dans la suite, nous travaillerons implicitement avec  $u$  **au voisinage de**  $+\infty$ . Nous venons de voir que  $m_1^u = s + o(1)$  et  $m_2^u = 1 - s + o(1)$ . En injectant cela dans (L1), on obtient :

$$\begin{aligned} u^2(1 - m_1^u - m_2^u) &= (d-2)s + (1-s)u o(1) + s u o(1) \\ &= o(u) \end{aligned} \tag{56}$$

Pour tout  $j \in \mathcal{E}$ , abrégeons  $\mu_{\mathbf{y}}(dx \times \{0\} \times \{j\})$  en  $\mu_{\mathbf{y},j}^u(dx)$ . En appliquant  $\mathcal{L}^u$  suivi de  $\mu_{\mathbf{y}}^u$  à gauche de la fonction  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{M})$  définie par  $g(x, y, j) = -(x - \bar{x})^2/2$ , on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[a,A]} (\bar{x} - x) F_x^1(x, 0) \mu_{\mathbf{y},1}^u(dx) + \int_{[a,A]} (\bar{x} - x) F_x^2(x, 0) \mu_{\mathbf{y},2}^u(dx) \\ &\quad + \sum_{2 < j \leq d} \int_{[a,A]} (\bar{x} - x) F_x^j(x, 0) \mu_{\mathbf{y},j}^u(dx). \end{aligned} \tag{57}$$

En répétant une nouvelle fois l'opération avec  $h : (x, y, j) \mapsto (\bar{x} - x) F_x^1(x, y) \mathbf{1}_{\{j=1\}}$ , on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[a,A]} \partial_x h(x, 0, 1) \mu_{\mathbf{y},1}^u(dx) - ((1-s)u + d-2) \int_{[a,A]} h(x, 0, 1) \mu_{\mathbf{y},1}^u(dx) \\ &\quad + s u \int_{[a,A]} h(x, 0, 1) \mu_{\mathbf{y},2}^u(dx) + u^2 \sum_{2 < j \leq d} \int_{[a,A]} h(x, 0, 1) \mu_{\mathbf{y},j}^u(dx) \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} \int_{[a,A]} h(x, 0, 1) \mu_{\mathbf{y},1}^u(dx) &= \frac{s u}{(1-s)u + d-2} \int_{[a,A]} h(x, 0, 1) \mu_{\mathbf{y},2}^u(dx) \\ &\quad + \frac{1}{(1-s)u + d-2} \int_{[a,A]} \partial_x h(x, 0, 1) \mu_{\mathbf{y},1}^u(dx) \\ &\quad + \frac{u^2}{(1-s)u + d-2} \sum_{2 < j \leq d} \int_{[a,A]} h(x, 0, 1) \mu_{\mathbf{y},j}^u(dx). \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(1-s)u + d-2} \int_{[a,A]} \partial_x h(x, 0, 1) \mu_{\mathbf{y},1}^u(dx) \right| &\leq \frac{\|\partial_x h\|_{\infty, \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}}}{(1-s)u + d-2} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0, \\ \left| \frac{u^2}{(1-s)u + d-2} \sum_{2 < j \leq d} \int_{[a,A]} h(x, 0, 1) \mu_{\mathbf{y},j}^u(dx) \right| &\leq \frac{u^2(1 - m_1^u - m_2^u) \|h\|_{\infty, \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}}}{(1-s)u + d-2} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$



en utilisant (56). Par conséquent :

$$\int_{[a,A]} h(x, 0, 1) \mu_{\mathbf{y},1}^u(dx) = \frac{s u}{(1-s)u + d - 2} \int_{[a,A]} h(x, 0, 1) \mu_{\mathbf{y},2}^u(dx) + o(1). \quad (58)$$

Si l'on réinjecte ce résultat dans (57), alors obtient, en se souvenant de la définition de  $h$  et de  $\nu_{\mathbf{y},2}^u$  :

$$\begin{aligned} & \int_{[a,A]} (\bar{x} - x) \left[ \frac{s u}{(1-s)u + d - 2} F_x^1(x, 0) + F_x^2(x, 0) \right] m_2^u \nu_{\mathbf{y},2}^u(dx) \\ &= - \sum_{2 < j \leq d} \int_{[a,A]} (\bar{x} - x) F_x^j(x, 0) \mu_{\mathbf{y},j}^u(dx) + o(1). \end{aligned}$$

Or, on a

$$\frac{s u}{(1-s)u + d - 2} m_2^u \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} s \quad \text{et} \quad m_2^u \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} (1-s).$$

En notant

$$C = \sup_{(x,y) \in \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}, j \in \mathcal{E}} |(\bar{x} - x) F_x^j(x, 0)| < +\infty,$$

cela entraîne que

$$\left| \int_{[a,A]} (\bar{x} - x) [s F_x^1(x, 0) + (1-s) F_x^2(x, 0)] \nu_{\mathbf{y},2}^u(dx) \right| \leq o(1)C + o(1)C + C(1 - m_1^u - m_2^u) + o(1),$$

d'où :

$$\left| \int_{[a,A]} (\bar{x} - x) \bar{F}_x(x, 0) \nu_{\mathbf{y},2}^u(dx) \right| = o(1). \quad (59)$$

Fixons  $\varepsilon > 0$ , et notons

$$\iota(\varepsilon) = \inf_{a \leq x \leq A, |x - \bar{x}| \geq \varepsilon} ((\bar{x} - x) \bar{F}_x(x, 0)).$$

Comme  $x \mapsto \bar{F}_x(x, 0)$  est continue, positive sur  $[a, A]$  et s'annule uniquement en  $x = \bar{x}$ , on a  $\iota(\varepsilon) > 0$ . En utilisant (59), on en déduit que

$$\nu_{\mathbf{y},2}^u([a, A] \setminus ]\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon[) \leq \int_{[a,A]} \frac{(\bar{x} - x) \bar{F}_x(x, 0)}{\iota(\varepsilon)} \nu_{\mathbf{y},2}^u(dx) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0.$$

On peut reproduire le même raisonnement en échangeant 1 et 2,  $s$  et  $(1-s)$ . Cela prouve la convergence en probabilité, et donc la convergence étroite, de  $\nu_{\mathbf{y},2}^u$  et  $\nu_{\mathbf{y},1}^u$  vers  $\delta_{\bar{x}}$ , quand  $u \rightarrow +\infty$ . Pour toute fonction test  $f \in \mathcal{C}(\mathbf{M})$ , on a :

$$\int_{\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}} f d\mu_{\mathbf{y}}^u = m_1^u \int_{[a,A]} f(x, 0, 1) \nu_{\mathbf{y},1}^u(dx) + m_2^u \int_{[a,A]} f(x, 0, 2) \nu_{\mathbf{y},2}^u(dx) + \sum_{2 < j \leq d} \int_{[a,A]} f(x, 0, j) \mu_{\mathbf{y},j}^u(dx). \quad (60)$$

Or le dernier terme est majoré en valeur absolue par  $\|f\|_{\infty} (1 - m_1^u - m_2^u)$ , et quand  $u \rightarrow +\infty$ , on a  $m_1^u \rightarrow s$  et  $m_2^u \rightarrow (1-s)$ . Par conséquent,  $\int_{\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}} f d\mu_{\mathbf{y}}^u \rightarrow s f(\bar{x}, 0, 1) + (1-s) f(\bar{x}, 0, 2)$ , ce qui conclut. ■

**Proposition 2.3.** *Pour tout  $p \in M$ , on a  $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p''$ . Cet ensemble est non vide, compact, connexe par arcs, et c'est l'adhérence de  $\mathcal{S}_p'$ .*

**Démonstration.** Fixons  $p \in M$ . Le caractère non vide est une conséquence de l'inclusion  $\mathcal{S}_p' \subseteq \mathcal{S}_p$ . La preuve de la proposition va consister à démontrer que :

- (i)  $\mathcal{S}_p'$  est dense dans  $\mathcal{S}_p$  ;
- (ii)  $\mathcal{S}_p''$  est compact et connexe par arcs.

Ces deux points ajoutés à la chaîne d'inclusions  $\mathcal{S}_p' \subseteq \mathcal{S}_p'' \subseteq \mathcal{S}_p$  entraînent l'ensemble de la proposition.

Commençons par démontrer un lemme d'approximation en vue d'obtenir (i). On note

$$C_1 = \sup_{i \in \mathcal{E}, p \in M} \|F^i(p)\| \quad \text{et} \quad C_2 = \sup_{i \in \mathcal{E}, p \in M} \|DF^i(p)\|,$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme subordonnée à la norme euclidienne  $\|\cdot\|$ .

**Lemme B.1.** *Soient  $h, \varepsilon > 0$  et  $\eta : [0, h] \rightarrow M$  vérifiant (ID) en  $t = 0$ , et  $\|\eta(h) - \eta_0 - h\dot{\eta}(0)\| \leq \varepsilon h$ . Alors pour tout  $\xi_0 \in M$ , il existe  $\xi \in \mathcal{S}'_{\xi_0}$  tel que :*

$$\|\xi(h) - \eta(h)\| \leq \|\xi_0 - \eta_0\|(1 + C_2 h) + C_2 C_1 h^2 + \varepsilon h. \quad (61)$$

**Démonstration.** Par hypothèse, il existe des coefficients  $\gamma_1, \dots, \gamma_d$  positifs et de somme 1 tels que  $\dot{\eta}(0) = \sum_{i=1}^d \gamma_i F^i(\eta_0)$ . Notons  $\mathbf{i} = (1, 2, \dots, d, 1)$ ,  $\mathbf{u} = (h\gamma_1, \dots, h\gamma_d)$ , et posons  $\xi = \eta_{\xi_0, \mathbf{i}, \mathbf{u}}$ . On notera également  $h_i = \sum_{j=1}^i h\gamma_j$  pour tout  $0 \leq i \leq d$ . Sur un intervalle de temps de type  $[h_{i-1}, h_i]$ ,  $\xi$  suit la dynamique de  $F^i$  donc en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 on obtient :

$$\|\xi(h_i) - \xi(h_{i-1}) - (h_i - h_{i-1})F^i(\xi_0)\| \leq (h_i - h_{i-1}) \sup_{s \in [h_{i-1}, h_i]} \|F^i(\xi(s)) - F^i(\xi_0)\|,$$

ce qui donne  $\|\xi(h_i) - \xi(h_{i-1}) - h\gamma_i F^i(\xi_0)\| \leq (h_i - h_{i-1})C_2 C_1 h$ . En sommant ces inégalités sur  $i$ , on trouve :

$$\|\xi(h) - \xi_0 - h \sum_{i=1}^d \gamma_i F^i(\xi_0)\| \leq C_2 C_1 h^2.$$

En écrivant

$$\begin{aligned} \xi(h) - \eta(h) &= (\xi_0 - \eta_0) + h \sum_{i=1}^d \gamma_i (F^i(\xi_0) - F^i(\eta_0)) + \left( \xi(h) - \xi_0 - h \sum_{i=1}^d \gamma_i F^i(\xi_0) \right) \\ &\quad - \left( \eta(h) - \eta_0 - h \sum_{i=1}^d \gamma_i F^i(\eta_0) \right), \end{aligned}$$

puis en majorant séparément chaque terme, on obtient :

$$\|\xi(h) - \eta(h)\| \leq \|\xi_0 - \eta_0\| + h \sum_{i=1}^d \gamma_i C_2 \|\xi_0 - \eta_0\| + C_2 C_1 h^2 + \varepsilon h.$$

Ce n'est autre que (61) puisque  $\sum_{i=1}^d \gamma_i = 1$ . □

Fixons désormais  $\eta \in \mathcal{S}_p$ ,  $T > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Par définition de  $\mathcal{S}_p$ , il existe un mesurable  $\mathcal{T} \subseteq [0, T]$  de complémentaire Lebesgue-négligeable dans  $[0, T]$ , sur lequel  $\eta$  est dérivable et vérifie  $\dot{\eta} \in \text{Conv}(F)(\eta)$ .

Si l'on définit, pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$\mathcal{T}_n = \{t \in \mathcal{T} : \forall h \in [0, 1/n], |\eta(t+h) - \eta(t) - h\dot{\eta}(t)| \leq \varepsilon h\},$$

alors  $\cup_{n \geq 1} \mathcal{T}_n = \mathcal{T}$ . Comme l'union est croissante et que les  $\mathcal{T}_n$  sont mesurables<sup>46</sup>, il existe un entier  $N$ , que l'on peut prendre supérieur à  $1/\varepsilon$ , tel que  $\ell(\mathcal{T}_N) \geq T - \varepsilon/2$ , où  $\ell$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $[0, T]$ . Comme celle-ci est de plus régulière intérieurement pour les compacts, il existe un compact  $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{T}_N$  tel que  $\ell(\mathcal{K}_1) \geq T - \varepsilon$ . On réalise alors la procédure suivante :

```

j:=1;
Tant que  $\mathcal{K}_j \neq \emptyset$  faire
     $t_j := \min \mathcal{K}_j$ ;
     $\mathcal{K}_{j+1} := \{t \in \mathcal{K}_j : t \geq t_j + 1/N\}$ ;
     $j := j + 1$ ;
Fin tant que.

```

Cette procédure termine après  $n \leq NT + 1$  boucles car la suite  $(t_j)$  progresse d'au moins  $1/N$  à chaque étape. Notons  $h_j = (1/N) \wedge (T - t_j)$ . Par construction, la famille de segments  $([t_j, t_j + h_j])_{1 \leq j \leq n}$  recouvre  $\mathcal{K}_1$ . Remarquons que pour tout  $1 \leq j \leq n$ , la fonction  $\eta(t_j + \cdot)$  vérifie les conditions du lemme B.1 avec  $h = h_j \leq 1/N \leq \varepsilon$ . Nous pouvons construire une approximation  $\xi \in \mathcal{S}'_p$  de  $\eta$  en procédant de la manière suivante :

1. On fait démarrer  $\xi$  en  $p$ ;
2. On suit le champ  $F^1$  (par exemple) en dehors des intervalles  $[t_j, t_j + h_j]$ ;
3. Quand  $\xi$  pénètre en  $[t_j, t_j + h_j]$  on fait coïncider  $\xi(t_j + \cdot)$  avec l'approximation de  $\eta(t_j + \cdot)$  fournie par le lemme B.1, issue de  $\xi(t_j)$ .

On aura alors, en ce qui concerne l'erreur sur les premières étapes :

- ◊  $\|\xi(t_1) - \eta(t_1)\| \leq 2C_1 t_1$  car  $\xi$  et  $\eta$  se déplacent à une vitesse inférieure à  $C_1$ ;
- ◊  $\|\xi(t_1 + h_1) - \eta(t_1 + h_1)\| \leq \|\xi(t_1) - \eta(t_1)\|(1 + C_2 h_1) + (C_2 C_1 + 1)\varepsilon h_1$ .

Afin de justifier heuristiquement ce qui va suivre, notons  $C_\varepsilon = (1 + C_2 C_1)\varepsilon$ ,  $u = \|\xi - \eta\|$  et récrivons le second point :

$$u(t_1 + h_1) \leq u(t_1)(1 + C_2 h_1) + C_\varepsilon h_1. \quad (62)$$

En imaginant  $h_1 \rightarrow 0$  on fait apparaître l'inégalité différentielle  $v' \leq C_2 v + C_\varepsilon$ , dont l'équation associée a pour solution  $v(t) = (v_0 + C_\varepsilon/C_2)e^{C_2 t} - C_\varepsilon/C_2$ . Ceci nous invite à transformer (62) en utilisant le fait que

$$u(t_1)(1 + C_2 h_1) + C_\varepsilon h_1 \leq (u(t_1) + C_\varepsilon/C_2)e^{C_2 h_1} - C_\varepsilon/C_2,$$

ce qui donne :

$$u(t_1 + h_1) \leq (2C_1 t_1 + C_\varepsilon/C_2)e^{C_2 h_1} - C_\varepsilon/C_2.$$

En notant  $\Delta t_{j,j+1} = t_{j+1} - (t_j + h_j)$  pour tout  $1 \leq j \leq n - 1$ , on a successivement :

$$\begin{aligned} \diamond u(t_2) &\leq u(t_1 + h_1) + 2C_1 \Delta t_{1,2} \\ &\leq (2C_1(t_1 + \Delta t_{1,2}) + C_\varepsilon/C_2)e^{C_2 h_1} - C_\varepsilon/C_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond u(t_2 + h_2) &\leq u(t_2)(1 + C_2 h_2) + C_\varepsilon h_2 \\ &\leq [2C_1(t_1 + \Delta t_{1,2}) + C_\varepsilon/C_2]e^{C_2(h_1 + h_2)} - C_\varepsilon/C_2; \end{aligned}$$

...

---

46. Ce que l'on voit en se restreignant aux  $h \in \mathbb{Q}$  dans la définition,  $\eta$  et  $\dot{\eta}$  étant mesurables sur  $\mathcal{T}$ .

$$\diamond u(t_n) \leq [2C_1(t_1 + \Delta t_{1,2} + \dots + \Delta t_{n-1,n}) + C_\varepsilon/C_2] e^{C_2(h_1 + \dots + h_{n-1})} - C_\varepsilon/C_2;$$

$$\diamond u(t_n + h_n) \leq [2C_1(t_1 + \Delta t_{1,2} + \dots + \Delta t_{n-1,n}) + C_\varepsilon/C_2] e^{C_2(h_1 + \dots + h_{n-1} + h_n)} - C_\varepsilon/C_2;$$

Etant donné que  $\mathcal{K}_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^n [t_j, t_j + h_j]$  et que  $\ell(\mathcal{K}_1) \geq T - \varepsilon$ , il s'ensuit que :

$$t_1 + \Delta t_{1,2} + \dots + \Delta t_{n-1,n} \leq \ell([0, T] \setminus \mathcal{K}_1) \leq \varepsilon,$$

et que la subdivision

$$0 \leq t_1 \leq t_1 + h_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_n + h_n \leq T$$

est de pas inférieur à  $\varepsilon$ . On en déduit que :

$$\forall t \in [0, T], \quad u(t) \leq \max_{1 \leq j \leq n} (u(t_j) \vee u(t_j + h_j)) + 2C_1\varepsilon,$$

soit finalement, en utilisant les inégalités obtenues sur les valeurs de  $u$  :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\xi(t) - \eta(t)\| \leq \left[ 2C_1\varepsilon + \frac{(1 + C_2C_1)}{C_2}\varepsilon \right] e^{C_2T} - \frac{(1 + C_2C_1)}{C_2}\varepsilon + 2C_1\varepsilon.$$

Comme un tel  $\xi \in \mathcal{S}'_p$  peut être construit pour tous  $\varepsilon > 0$ ,  $T > 0$  et  $\eta \in \mathcal{S}_p$ , cela prouve la densité de  $\mathcal{S}'_p$  dans  $\mathcal{S}_p$ , i.e. le point (i).

Passons au point (ii). Nous commençons d'abord par démontrer que l'ensemble  $\mathcal{S}'' := \bigcup_{p \in M} \mathcal{S}''_p$  est compact. L'espace  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, M)$  étant métrisable, on raisonnera de façon séquentielle. On se fixe donc une suite  $(\eta^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{S}''$ . Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$  on dispose de fonctions  $\gamma_i^{(k)} : \mathbb{R}_+ \rightarrow M, i \in \mathcal{E}$ , mesurables positives et de somme 1 telles que<sup>47</sup> :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \eta^{(k)}(t) = \eta^{(k)}(0) + \int_0^t \sum_{i \in \mathcal{E}} \gamma_i^{(k)}(s) F^i(\eta^{(k)}(s)) ds. \quad (63)$$

Soit  $T > 0$  quelconque. Les restrictions des  $\eta^{(k)}$  au compact  $[0, T]$  sont continues, à valeurs dans le compact  $M$ , et  $C_1$ -lipschitziennes. D'après le théorème d'Ascoli, quitte à extraire on peut supposer qu'il existe  $\eta_T \in \mathcal{C}([0, T], M)$  tel que

$$\eta^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \eta_T$$

uniformément sur  $[0, T]$ . En posant  $\ell_T = (1/T)\ell$ , on fait de  $([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \ell_T)$  un espace de probabilité. Pour tout  $i \in \mathcal{E}$ , la famille de fonctions  $(\gamma_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ , peut être vue comme une famille uniformément intégrable d'éléments de  $L^1(\ell_T)$ <sup>48</sup>. D'après le théorème de Dunford-Pettis, c'est donc une famille relativement compacte pour la topologie faible. Le théorème d'Eberlein-Smulian montre en outre que cette relative compacité peut être prise au sens séquentiel. Autrement dit, quitte à extraire successivement pour chaque  $i \in \mathcal{E}$ , on peut supposer qu'il existe des fonctions  $\gamma_1, \dots, \gamma_d \in L^1(\ell_T)$  telles que

$$\gamma_i^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \gamma_i$$

faiblement dans  $L^1(\ell_T)$ . Comme le dual topologique de  $L^1(\ell_T)$  s'identifie à  $L^\infty(\ell_T)$ , cela implique que

47. C'est simplement une formulation sous forme intégrale de la définition des  $\mathcal{S}''_p$ .

48. On confondra, comme il est souvent d'usage, les fonctions et leur classe d'équivalence pour la relation d'égalité presque partout.

pour toute fonction  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée, pour tout  $i \in \mathcal{E}$  :

$$\int_0^T [\gamma_i^{(k)}(s) - \gamma_i(s)] g(s) ds \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \quad (64)$$

Notons

$$u_k = \sup_{t \in [0, T]} \|\eta^{(k)}(t) - \eta_T(t)\|,$$

quantité qui tend vers 0 quand  $k \rightarrow +\infty$ . Pour tous  $t \in [0, T]$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \left\| \eta_T(t) - \eta_T(0) - \int_0^t \sum_{i \in \mathcal{E}} \gamma_i(s) F^i(\eta_T(s)) ds \right\| &\leq \|\eta_T(t) - \eta^{(k)}(t)\| + \|\eta_T(0) - \eta^{(k)}(0)\| \\ &\quad + \left\| \int_0^t \sum_{i \in \mathcal{E}} [\gamma_i(s) - \gamma_i^{(k)}(s)] F^i(\eta_T(s)) ds \right\| \\ &\quad + \left\| \int_0^t \sum_{i \in \mathcal{E}} \gamma_i^{(k)}(s) [F^i(\eta_T(s)) - F^i(\eta^{(k)}(s))] ds \right\| \\ &\leq 2u_k + \sum_{i \in \mathcal{E}} \left\| \int_0^t [\gamma_i(s) - \gamma_i^{(k)}(s)] F^i(\eta_T(s)) ds \right\| + C_2 T u_k. \end{aligned}$$

En faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$  et en appliquant (64) à chaque composante des fonctions  $s \mapsto \mathbf{1}_{s \leq t} F^i(\eta_T(s))$ , on voit que :

$$\forall t \in [0, T], \quad \eta_T(t) = \eta_T(0) + \int_0^t \sum_{i \in \mathcal{E}} \gamma_i(s) F^i(\eta_T(s)) ds,$$

autrement dit  $\eta_T$  est solution de l'inclusion différentielle (ID) sur  $[0, T]$ .

Récapitulons : si  $(\eta^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{S}''$ , alors on peut en extraire une sous-suite  $(\eta^{(\phi_1(k))})_{k \in \mathbb{N}}$  (où  $\phi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante) qui converge uniformément sur  $[0, T]$  vers une solution  $\eta_T$  de l'inclusion différentielle (ID). En poursuivant, on construit  $\phi_2, \phi_3, \dots$  telles que pour tout  $n \in \{2, 3, \dots\}$ , la suite extraite  $(\eta^{(\phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_n(k))})_{k \in \mathbb{N}}$  converge uniformément quand  $k \rightarrow +\infty$  vers une solution  $\eta_{nT}$  de (ID) sur  $[0, nT]$ . Les fonctions  $\eta_{nT}$  coïncident avec une unique fonction  $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow M$ , qui appartient à  $\mathcal{S}''$ . Si l'on définit l'extraction diagonale  $\Psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Psi(k) = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_k(k),$$

alors la suite  $(\eta^{(\Psi(k))})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\eta \in \mathcal{S}''$  dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, M)$  : ainsi,  $\mathcal{S}''$  est compact. De plus pour tout  $p \in M$ , l'ensemble des fonctions d'origine  $p$  est un fermé de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, M)$  donc  $\mathcal{S}_p''$  est également compact.

Pour finir, démontrons la connexité par arcs de  $\mathcal{S}_p''$ . Soient  $\eta_0, \eta_1 \in \mathcal{S}_p''$  et  $(\gamma_i^{(0)})_{i \in \mathcal{E}}, (\gamma_i^{(1)})_{i \in \mathcal{E}}$  leurs familles de fonctions barycentriques associées. Définissons pour tous  $u \in [0, 1]$ ,  $i \in \mathcal{E}$  :

$$\gamma_i^{(u)} = (1 - u)\gamma_i^{(0)} + u\gamma_i^{(1)},$$

et posons  $\eta_u \in \mathcal{S}_p''$  comme étant l'unique solution de l'équation

$$\dot{\eta}_u(t) = \sum_{i \in \mathcal{E}} \gamma_i^{(u)}(t) F^i(\eta_u(t))$$

d'origine  $\eta_u(0) = p$ . Il s'agit de montrer que  $u \mapsto \eta_u$ , qui joint  $\eta_0$  à  $\eta_1$ , est un chemin continu. Pour

cela donnons-nous  $u, u' \in [0, 1]$ . On a pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :

$$\begin{aligned} \eta_u(t) - \eta_{u'}(t) &= \int_0^t \sum_{i \in \mathcal{E}} [\gamma_i^{(u)}(s) - \gamma_i^{(u')}(s)] F^i(\eta_u(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t \sum_{i \in \mathcal{E}} \gamma_i^{(u')}(s) [F^i(\eta_u(s)) - F^i(\eta_{u'}(s))] ds, \end{aligned}$$

d'où :

$$\|\eta_u(t) - \eta_{u'}(t)\| \leq 2C_1 t |u - u'| + C_2 \int_0^t \|\eta_u(s) - \eta_{u'}(s)\| ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|\eta_u(t) - \eta_{u'}(t)\| \leq 2C_1 t |u - u'| e^{C_2 t},$$

d'où la continuité de  $u \mapsto \eta_u$  pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.  $\blacksquare$

**Proposition 4.3.** *Pour tout  $p \in M$ , l'ensemble  $\omega_\Psi(p)$  est fortement positivement invariant et invariant sous  $\Psi$ .*

**Démonstration.** Soit  $q \in \omega_\Psi(p)$ . Pour tout  $n \geq 1$ ,  $q \in \overline{\Psi_{[n, +\infty[}(p)}$ , donc il existe une fonction  $\eta_n \in \mathcal{S}_p$  et  $t_n \geq n$  tels que

$$\|\eta_n(t_n) - q\| \leq 1/n. \quad (65)$$

Posons, pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $-1 \leq t \leq 1$ ,  $\xi_n(t) = \eta_n(t_n + t)$ . La famille  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille de solutions de l'inclusion différentielle (ID) sur  $[-1, 1]$  à valeurs dans  $M$ . Au cours de la preuve de la proposition 2.3, nous montrons la compacité de  $\mathcal{S}'' = \cup_{p \in M} \mathcal{S}_p'' = \cup_{p \in M} \mathcal{S}_p$ . De même, l'ensemble des solutions de (ID) sur  $[-1, 1]$  à valeurs dans  $M$  est compact donc on peut extraire une sous-suite de  $(\xi_n)$  convergeant uniformément vers une solution  $\xi$  de (ID) sur  $[-1, 1]$ . La propriété (65) entraîne  $\xi(0) = q$ .

Soient  $t \in [-1, 1]$  et  $T \in \mathbb{R}_+$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , par construction de  $\xi$ , il existe  $n \geq T + 1$  tel que  $\|\xi(t) - \eta(t_n + t)\| < \varepsilon$ . Or,  $t_n + t \geq n - 1 \geq T$ , d'où  $\xi(t) \in \overline{\Psi_{[T, +\infty[}(p)}$ . Comme ceci vaut pour tout  $T \geq 0$ , et tout  $t \in [-1, 1]$ , on a  $\xi([-1, 1]) \subseteq \omega_\Psi(p)$ . Cela signifie qu'à partir d'un point  $q \in \omega_\Psi(p)$  quelconque on peut construire deux solutions de (ID) définies sur des intervalles de temps de longueur 1, l'une terminant en  $q$ , ici  $\xi_{[-1, 0]}$ , et l'autre partant de  $q$ ,  $\xi_{[0, 1]}$ , et à valeurs dans  $\omega_\Psi(p)$ . On peut donc augmenter l'intervalle de définition de  $\xi$  des deux côtés d'autant d'unités de temps que l'on souhaite, c'est-à-dire que l'on peut prolonger  $\xi$  en une application  $\tilde{\xi} : \mathbb{R} \rightarrow \omega_\Psi(p)$  solution de (ID). Autrement dit,  $\omega_\Psi(p)$  est invariant sous  $\Psi$ .

Passons à l'invariance positive forte de  $\omega_\Psi(p)$ . Fixons  $q \in \omega_\Psi(p)$ ,  $\eta \in \mathcal{S}_q$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Il s'agit de montrer que  $\eta(t) \in \omega_\Psi(p)$ . On se donne  $\varepsilon > 0$  et  $T \in \mathbb{R}_+$ . D'après la proposition 2.3, on a  $\overline{\mathcal{S}_q'} = \mathcal{S}_q$ , d'où l'existence de  $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T}$  tel que  $\|\eta_{q, \mathbf{i}, \mathbf{u}}(t) - \eta(t)\| < \varepsilon$ . Par continuité des flots composés, il existe  $\tilde{\varepsilon} > 0$  tel que :

$$\forall q' \in M, \quad \|q' - q\| < \tilde{\varepsilon} \Rightarrow \|\eta_{q', \mathbf{i}, \mathbf{u}}(t) - \eta(t)\| < \varepsilon.$$

Soient  $\gamma \in \mathcal{S}_p$  et  $s \geq T$  tels que  $\|\gamma(s) - q\| < \tilde{\varepsilon}$ , si l'on concatène  $\gamma_{[0, s]}$  avec  $\eta_{\gamma(s), \mathbf{i}, \mathbf{u}}$ , on obtient un chemin  $\sigma \in \mathcal{S}_p$  qui vérifie  $\|\sigma(s + t) - \eta(t)\| < \varepsilon$ , avec  $s + t \geq T$ . Comme on peut faire ceci pour tous  $\varepsilon > 0$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$ , on a  $\eta(t) \in \omega_\Psi(p)$ , ce qui conclut.  $\blacksquare$

## Annexe C Persistance potentielle : réalisation

Dans cette annexe, nous nous intéressons aux conditions de réalisation des hypothèses du cas **e** (persistance potentielle) présenté dans la section 1.3, à savoir :  $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$ ,  $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$  et  $\Gamma \cap M_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$ .

Tout d'abord, voyons pourquoi ce cas constitue une nouveauté par rapport à l'article [BL16], dans lequel les auteurs travaillent avec deux environnements de type Lotka-Volterra et des taux de saut constants. Il se trouve que dans ce cadre, les hypothèses  $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$  et  $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$  impliquent l'existence d'un champ moyen  $\bar{F} = sF^1 + (1-s)F^2$ , avec  $s \in ]0, 1[$ , lui aussi de type Lotka-Volterra, qui est favorable à l'espèce **y** (voir [BL16, Proposition 2.5]). En particulier, pour chaque condition initiale dans  $M \setminus M_0$ , la courbe intégrale  $\eta$  associée à  $\bar{F}$  issue de ce point converge vers l'équilibre  $(0, \bar{y}) \in M_0^{\mathbf{x}}$  de ce champ. Cela entraîne que  $(0, \bar{y}) \in \Gamma$  (voir la section 2.2)<sup>49</sup>, donc  $\Gamma \cap M_0^{\mathbf{x}} \neq \emptyset$ .

Passons à la construction d'un exemple remplissant les conditions du cas **e**. Par rapport à l'article [BL16], on va s'affranchir uniquement d'une contrainte, celle que les environnements sont de type Lotka-Volterra. On commence par se donner des fonctions  $\tilde{H}_{\mathbf{h},i}$ , pour  $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$  et  $i \in \{1, 2\}$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  contenant  $(\mathbb{R}_+)^2$ , de telle sorte que les courbes  $\text{iso}_{\mathbf{h},i} = \{\tilde{H}_{\mathbf{h},i} = 0\}$  soient disposées de la manière exposée sur la figure 10.

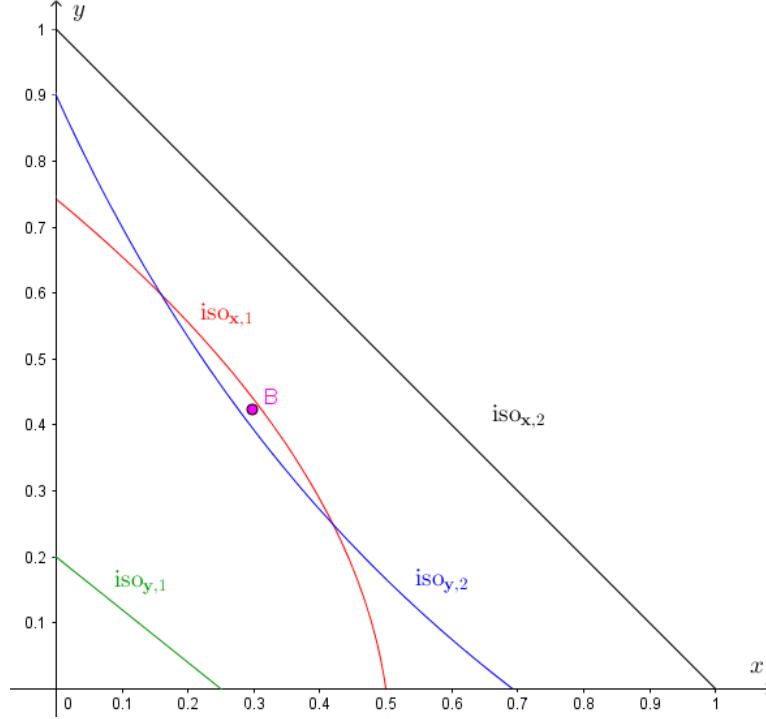


FIGURE 10 – Disposition souhaitée des isoclines  $\text{iso}_{\mathbf{h},i}$ .

Le point  $B$  vérifie  $\tilde{H}_{\mathbf{y},1}(B) < 0$  et  $\tilde{H}_{\mathbf{x},2}(B) > 0$ . Pour cet exemple, on a pris :

$$\tilde{H}_{\mathbf{x},1}(x, y) = 1 - \frac{7x + y(1 + 5y)}{3,5}, \quad \tilde{H}_{\mathbf{y},1}(x, y) = 1 - 4x - 5y,$$

$$\tilde{H}_{\mathbf{x},2}(x, y) = 1 - x - y, \quad \tilde{H}_{\mathbf{y},2}(x, y) = 0,9 - \frac{2,2x}{1+x} - y.$$

49. D'une façon plus informelle, cela vient de ce qu'on peut suivre une trajectoire arbitrairement proche de  $\eta$  en alternant suffisamment rapidement entre les deux environnements, de façon à passer une proportion  $s$  du temps à suivre  $F^1$  et  $1-s$  à suivre  $F^2$ .

Notons que les hypothèses (H1), (H2) et (H3) que doivent vérifier les taux de croissance par tête des espèces sont stables par multiplication par un scalaire strictement positif, et par combinaison convexe. On note pour tout  $\alpha > 0$  :

$$H_x^{(\alpha)} = (\alpha/2)\tilde{H}_{x,1} + (1/2)\tilde{H}_{x,2} \quad \text{et} \quad H_y^{(\alpha)} = (1/2)\tilde{H}_{y,1} + (\alpha/2)\tilde{H}_{y,2}.$$

Le champ associé

$$F^{(\alpha)} : (x, y) \mapsto (xH_x^{(\alpha)}(x, y), yH_y^{(\alpha)}(x, y))$$

est par construction la moyenne de deux champs  $F^{1,(\alpha)}$  et  $F^{2,(\alpha)}$  dont les couples d'isoclines sont  $(\text{iso}_{x,1}, \text{iso}_{y,1})$  pour l'un et  $(\text{iso}_{x,2}, \text{iso}_{y,2})$  pour l'autre : chacun est favorable à l'espèce  $x$ . Pour  $\alpha$  grand, les isoclines  $\{H_x^{(\alpha)} = 0\}$  et  $\{H_y^{(\alpha)} = 0\}$  sont respectivement proches de  $\text{iso}_{x,1}$  et  $\text{iso}_{y,2}$ . On peut donc prendre  $\alpha$  tel que l'entrelacement des isoclines soit fidèle à la figure 11. On choisit alors  $F^1 = F^{1,(\alpha)}$  et  $F^2 = F^{2,(\alpha)}$  comme environnements.

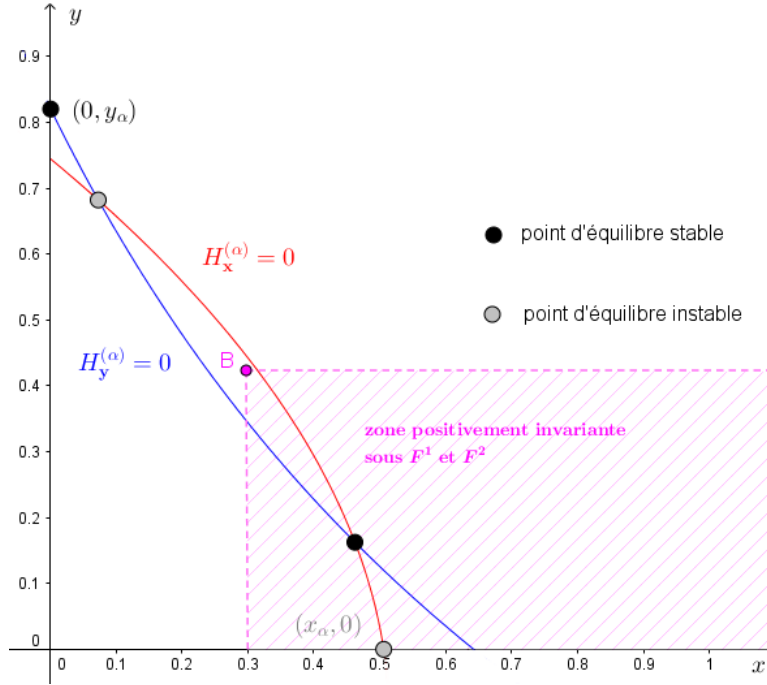


FIGURE 11 – Isoclines de l'environnement  $F^\alpha$  pour  $\alpha$  grand.

On a ici repris les équations utilisées pour l'exemple représenté en figure 10, avec  $\alpha = 40$ .

La position du point  $B$  vis-à-vis des isoclines sur la figure 10 implique que pour  $i \in \{1, 2\}$ , on a  $F_x^i > 0$  sur  $\{x_B\} \times [0, y_B]$  et  $F_y^i < 0$  sur  $[x_B, +\infty[ \times \{y_B\}$ . Par conséquent la zone  $[x_B, +\infty[ \times [0, y_B]$  est positivement invariante par  $F^i$ . En particulier, la frontière  $M_0^\times$  est disjointe de  $\Gamma$  et il nous reste à montrer qu'en choisissant de bonnes fonctions de taux de saut, on peut obtenir  $\Lambda_y > 0$  et  $\Lambda_x < 0$ . La proposition 1.12 montre qu'en prenant des taux constants  $\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = u/2$ , on a

$$\Lambda_y^u = \mu_y^u(H_y) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} H_x^{(\alpha)}(0, y_\alpha) > 0,$$

$$\Lambda_x^u \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} H_x^{(\alpha)}(0, y_\alpha) < 0.$$

En choisissant ces taux avec  $u$  suffisamment grand, nous obtenons les caractéristiques souhaitées.



## Annexe D Résultats classiques

### Variétés stable et instable

Dans cette section, on se donne  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  un champ de vecteur lisse sur  $U$ , admettant un point d'équilibre  $p_e$ . On note  $\phi : (t, p) \mapsto \phi_t(p)$  son flot, défini sur un ouvert  $U_\phi \subseteq \mathbb{R} \times U$ . On note  $W_{stable}^X(p_e)$  (resp  $W_{instable}^X(p_e)$ ) l'ensemble des points  $p \in U$  tels que  $\mathbb{R}_+ \times \{p\}$  (resp.  $\mathbb{R}_- \times \{p\}$ ) est inclus dans  $U_\phi$  et  $\phi_t(p) \rightarrow p_e$  quand  $t \rightarrow +\infty$  (resp  $t \rightarrow -\infty$ ). Les domaines  $W_{stable}^X(p_e)$  et  $W_{instable}^X(p_e)$  sont appelés respectivement variété stable et instable du point  $p_e$ , associée au champ  $X$ .

On suppose de plus que  $DX(p_e)$  est diagonalisable dans une base  $(\vec{u}, \vec{v})$ . On note  $(x', y')$  les coordonnées dans le repère d'origine  $p_e$  associé à cette base, et  $(X_{x'}, X_{y'})$  les coordonnées du champ dans  $(\vec{u}, \vec{v})$ . Pour tout  $\delta > 0$  on appelle  $\diamond_\delta$  le parallélogramme d'équation  $0 \leq \max(|x'|, |y'|) \leq \delta$ .

**Théorème D.1.** *Supposons que  $p_e$  soit une selle, avec  $\vec{u}$  associé à la valeur propre négative et  $\vec{v}$  à la valeur propre positive de  $DX(p_e)$ . Alors  $W_{stable}^X(p_e)$  et  $W_{instable}^X(p_e)$  sont deux courbes lisses, tangentes en  $p_e$  à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  respectivement. De plus, pour  $\delta > 0$  suffisamment petit :*

- ★  $X_{x'} > 0$  sur l'arête gauche<sup>50</sup>,  $X_{x'} < 0$  sur l'arête droite,  $X_{y'} > 0$  sur l'arête supérieure et  $X_{y'} < 0$  sur l'arête inférieure du parallélogramme  $\diamond_\delta$  ;
- ★ pour tout  $p \in \diamond_\delta$  n'appartenant pas à  $W_{stable}^X(p_e)$  (resp.  $W_{instable}^X(p_e)$ ), la courbe  $t \mapsto \phi_t(p)$  sort de  $\diamond_\delta$  lorsque l'on fait croître (resp. décroître)  $t$ .

**Démonstration.** Voir [HSD04, §8.3] pour une démonstration géométrique. Les auteurs s'y limitent toutefois à démontrer la régularité  $\mathcal{C}^1$  des courbes. On pourra consulter [Tes12, §9.2] pour un traitement complet concernant les variétés stable et instable, en dimension quelconque.

Nous nous bornerons ici à justifier le premier item. En notant  $(-\mu, \nu)$  le couple de valeurs propres associé à  $(\vec{u}, \vec{v})$ , on a :

$$X_{x'} = -\mu x' + o(|x'| + |y'|) \quad \text{et} \quad X_{y'} = \nu y' + o(|x'| + |y'|).$$

Prenons le cas de l'arête gauche par exemple, si  $\delta$  est assez petit alors sur cette arête :

$$X_{x'} \geq -\mu x' - \frac{\mu}{4}(|x'| + |y'|) \geq \frac{\mu}{2}\delta > 0.$$

Le reste se traite de façon analogue. ■

**Théorème D.2.** *Si  $p_e$  est un puits, alors  $W_{stable}^X(p_e)$  est un ouvert contenant  $p_e$ , et  $W_{instable}^X(p_e)$  est réduit au singleton  $\{p_e\}$ . De plus, pour  $\delta > 0$  suffisamment petit,  $X_{x'} > 0$  sur l'arête gauche<sup>50</sup>,  $X_{x'} < 0$  sur l'arête droite,  $X_{y'} < 0$  sur l'arête supérieure et  $X_{y'} > 0$  sur l'arête inférieure du parallélogramme  $\diamond_\delta$ . En particulier, celui-ci est positivement invariant par le flot. Si  $p_e$  est une source, les mêmes assertions sont vérifiées en échangeant  $W_{stable}^X(p_e)$  et  $W_{instable}^X(p_e)$ , et en changeant le sens des inégalités.*

**Démonstration.** Supposons que  $p_e$  est un puits. L'application  $V : p \mapsto x'(p)^2 + y'(p)^2$  est alors un exemple de fonction de Lyapunov pour le point d'équilibre  $p_e$ . Par conséquent, pour  $\varepsilon$  assez petit, l'ensemble de sous-niveau de  $V_\varepsilon = \{V < \varepsilon\}$  est inclus dans  $W_{stable}^X(p_e)$ , et pour tout  $p \in V_\varepsilon \setminus \{p_e\}$ , la courbe  $t \mapsto \phi_t(p)$  sort définitivement de  $V_\varepsilon$  lorsque l'on fait décroître le temps. Partant de là, on voit

50. On se représente  $\vec{u}$  comme un vecteur horizontal et  $\vec{v}$  comme un vecteur vertical

sans difficulté que  $W_{instable}^X(p_e) = \{p_e\}$  et que

$$W_{stable}^X(p_e) = \cup_{t \in \mathbb{R}_+} \{p \in U : (p, t) \in U_\phi \text{ et } \phi(p, t) \in V_\varepsilon\},$$

d'où son caractère ouvert. Les assertions concernant le signe de  $X_{x'}$  et  $X_{y'}$  se prouvent comme dans le théorème D.1. Le parallélogramme  $\diamond_\delta$  est alors positivement invariant car le champ est entrant sur sa frontière.

Si  $p_e$  est une source, on se ramène au cas traité en renversant le sens du temps. ■

## Théorème ergodique de Harris

**Théorème D.3** (Harris). *Soit  $\mathcal{P}$  un noyau markovien sur un espace mesurable  $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ . Supposons que les deux critères suivants soient vérifiés :*

(i) *Il existe une fonction mesurable  $W : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  et des constantes  $0 \leq \gamma < 1$ ,  $K \geq 0$  telles que  $\mathcal{P}W \leq \gamma W + K$  ;*

(ii) *Il existe un niveau  $R > 2K/(1 - \gamma)$ , une mesure de probabilité  $\nu$  sur  $\mathbb{X}$  et une constante  $0 < c \leq 1$  tels que*

$$\forall x \in \mathbb{X}, W(x) \leq R \Rightarrow \mathcal{P}(x, \cdot) \geq c\nu(\cdot).$$

*Alors il existe une unique mesure de probabilité  $\pi$  invariante par  $\mathcal{P}$ , et des constantes  $C > 0$ ,  $0 \leq \tilde{\gamma} < 1$  telles que, pour toute fonction  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée et tous  $x \in \mathbb{X}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  :*

$$|\mathcal{P}^k f(x) - \pi f| \leq C\tilde{\gamma}^k (1 + W(x)) \|f - \pi f\|_\infty.$$

**Démonstration.** Voir [HM11]. ■

## Loi forte des grands nombres pour les martingales

Dans cette section on se donne un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$  et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite  $(\mathcal{F}_n)$ -adaptée de variables aléatoires dans  $L^2(\mathbb{P})$ , vérifiant  $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$ . Le processus  $(M_n)$  défini pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $M_n = \sum_{k=1}^n X_k$  est alors une  $(\mathcal{F}_n)$ -martingale  $L^2$ .

**Théorème D.4.** *Si  $\sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(X_n^2)/n^2 < +\infty$ , alors :*

$$\frac{M_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad p.s.$$

*En particulier c'est le cas si  $(X_n)$  est bornée dans  $L^2(\mathbb{P})$ .*

**Démonstration.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k/k$ . Le processus  $(Y_n)$  est aussi une  $(\mathcal{F}_n)$ -martingale  $L^2$ , et vérifie  $\mathbb{E}(Y_n^2) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2)/k^2$ . L'hypothèse implique alors que  $(Y_n)$  est bornée dans  $L^2$ , donc elle converge vers une limite finie sur un ensemble de probabilité 1. On conclut au moyen du lemme suivant.

**Lemme D.5** (Kronecker). *Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de réels telle que la série de terme général  $x_n/n$  converge. Alors :*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

**Démonstration.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $r_n = \sum_{k \geq n} x_k/k$ . La suite  $(r_n)$  tend vers 0. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(r_k - r_{k+1}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r_k - r_{n+1}. \end{aligned}$$

Or, quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $r_{n+1}$  tend vers 0, ainsi que  $(\sum_{k=1}^n r_k)/n$  d'après le lemme de Césàro. □ ■

## Index des notations

Ci-dessous, une liste avec quelques notations standards non nécessairement explicitées dans le texte, avec le lieu de leur première occurrence.

$\dot{x}$	dérivée de $x$ par rapport au temps, page 2
$\partial_x$	dérivée partielle par rapport à la variable $x$ , page 3
$Dg$	différentielle de la fonction $g$ , page 11
$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$	ensemble des fonctions réelles sur $\mathcal{U}$ infiniment dérivables, page 3
$\mathcal{C}(\mathbf{M})$	ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbf{M}$ , page 11
$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$	ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}_+$ admettant une dérivée continue, page 31
$\ g\ _\infty$	supremum de la valeur absolue de $g$ , page 11
$\ \cdot\ $	norme euclidienne, page 15
$\ \cdot\ _{VT}$	norme de variation totale (subordonnée à $\ \cdot\ _\infty$ pour l'action sur les fonctions mesurables bornées), page 21
$\overline{B}$	adhérence de $B$ , page 12
$\overset{\circ}{\Gamma}$	intérieur de $\Gamma$ , page 30
$B_\varepsilon(q)$	boule ouverte de centre $q$ et de rayon $\varepsilon$ pour la norme euclidienne, page 34
$(F_x, F_y)$	composantes du champ $F$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , page 3
$\text{sgn}$	fonction signe (vaut 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ , $-1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ , et 0 en 0), page 3
$x_0 \vee A$	maximum de $x_0$ et $A$ , page 3
$t \wedge t_n$	minimum de $t$ et $t_n$ , page 15
$\delta_i$	mesure de Dirac en $i$ , page 12