Effets remarquables des fluctuations aléatoires de l'environnement sur la compétition entre deux espèces

Adrien Prodhomme

Ecole Polytechnique

30 août 2017

Article de référence

✏ M. Benaïm et C.Lobry, 2016

Lotka-Volterra with randomly fluctuating environments or "How Switching between beneficial environments can make survival harder"

Plan

Plan

Evolution déterministe

Cadre :

- deux espèces $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, de populations $x(t),\ y(t) \in \mathbb{R}_+$;

Evolution déterministe

Cadre :

- deux espèces $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, de populations $x(t),\ y(t) \in \mathbb{R}_+$;
- compétition intra/interspécique (partage de ressources) ;

Evolution déterministe

Cadre :

- deux espèces $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, de populations $x(t),\ y(t) \in \mathbb{R}_+$;
- compétition intra/interspécique (partage de ressources) ;
- en environnement constant :

$$\begin{cases} \dot{x} = xH_{\mathbf{x}}(x,y) \\ \dot{y} = yH_{\mathbf{y}}(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

Evolution déterministe

Cadre :

- deux espèces $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, de populations $x(t),\ y(t) \in \mathbb{R}_+$;
- compétition intra/interspécique (partage de ressources) ;
- en environnement constant :

$$\begin{cases} \dot{x} = xH_{\mathbf{x}}(x,y) =: F_x(x,y) \\ \dot{y} = yH_{\mathbf{y}}(x,y) =: F_y(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

Evolution déterministe

Cadre :

- deux espèces $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, de populations $x(t),\ y(t) \in \mathbb{R}_+$;
- compétition intra/interspécique (partage de ressources) ;
- en environnement constant :

$$\begin{cases} \dot{x} = xH_{\mathbf{x}}(x,y) =: F_x(x,y) \\ \dot{y} = yH_{\mathbf{y}}(x,y) =: F_y(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

- $H_{\mathbf{h}}$: taux de croissance *per capita* de $\mathbf{h}$ (pas d'immigration) ;

Evolution déterministe

Cadre :

- deux espèces $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, de populations $x(t),\ y(t) \in \mathbb{R}_+$;
- compétition intra/interspécique (partage de ressources) ;
- en environnement constant :

$$\begin{cases} \dot{x} = xH_{\mathbf{x}}(x,y) =: F_x(x,y) \\ \dot{y} = yH_{\mathbf{y}}(x,y) =: F_y(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

- $H_{\mathbf{h}}$: taux de croissance *per capita* de $\mathbf{h}$ (pas d'immigration) ;
- implicitement : loi des grands nombres.

Taux de croissance

Hypothèses :

(H0) $H_{\mathbf{h}}$ est lisse ;

Taux de croissance

Hypothèses :

(H0) $H_{\mathbf{h}}$ est lisse ;

(H1) $H_{\mathbf{h}}(0,0) > 0$ (croissance spontanée) ;

Taux de croissance

Hypothèses :

(H0) $H_{\mathbf{h}}$ est lisse ;

(H1) $H_{\mathbf{h}}(0,0) > 0$ (croissance spontanée) ;

(H2) $\partial_x H_{\mathbf{h}} > 0$ et $\partial_y H_{\mathbf{h}} < 0$ (compétition) ;

Taux de croissance

Hypothèses :

(H0) $H_{\mathbf{h}}$ est lisse ;

(H1) $H_{\mathbf{h}}(0,0) > 0$ (croissance spontanée) ;

(H2) $\partial_x H_{\mathbf{h}} > 0$ et $\partial_y H_{\mathbf{h}} < 0$ (compétition) ;

(H3) $\exists A > 0, \quad x \vee y \geq A \Rightarrow H_{\mathbf{h}}(x,y) < 0$ (seuil de dépopulation).

Taux de croissance

Hypothèses :

(H0) $H_{\mathbf{h}}$ est lisse ;

(H1) $H_{\mathbf{h}}(0,0) > 0$ (croissance spontanée) ;

(H2) $\partial_x H_{\mathbf{h}} > 0$ et $\partial_y H_{\mathbf{h}} < 0$ (compétition) ;

(H3) $\exists A > 0, \quad x \vee y \geq A \Rightarrow H_{\mathbf{h}}(x,y) < 0$ (seuil de dépopulation).

Conséquences :

- ✏ un équilibre $x_{\mathbf{x}} > 0$ unique pour l'espèce $\mathbf{x}$ en l'absence de $\mathbf{y}$;

Taux de croissance

Hypothèses :

(H0) $H_{\mathbf{h}}$ est lisse ;

(H1) $H_{\mathbf{h}}(0,0) > 0$ (croissance spontanée) ;

(H2) $\partial_x H_{\mathbf{h}} > 0$ et $\partial_y H_{\mathbf{h}} < 0$ (compétition) ;

(H3) $\exists A > 0, \quad x \vee y \geq A \Rightarrow H_{\mathbf{h}}(x,y) < 0$ (seuil de dépopulation).

Conséquences :

- un équilibre $x_{\mathbf{x}} > 0$ unique pour l'espèce $\mathbf{x}$ en l'absence de $\mathbf{y}$;
- l'isocline $\mathrm{iso}_{\mathbf{x}} := \{H_{\mathbf{x}} = 0\}$ est le graphe de $g_{\mathbf{x}} : [0, x_{\mathbf{x}}] \to \mathbb{R}_+$ lisse strictement décroissante ;

Taux de croissance

Hypothèses :

(H0) $H_{\mathbf{h}}$ est lisse ;

(H1) $H_{\mathbf{h}}(0,0) > 0$ (croissance spontanée) ;

(H2) $\partial_x H_{\mathbf{h}} > 0$ et $\partial_y H_{\mathbf{h}} < 0$ (compétition) ;

(H3) $\exists A > 0, \quad x \vee y \geq A \Rightarrow H_{\mathbf{h}}(x,y) < 0$ (seuil de dépopulation).

Conséquences :

- un équilibre $x_{\mathbf{x}} > 0$ unique pour l'espèce $\mathbf{x}$ en l'absence de $\mathbf{y}$;
- l'isocline $\mathrm{iso}_{\mathbf{x}} := \{H_{\mathbf{x}} = 0\}$ est le graphe de $g_{\mathbf{x}} : [0, x_{\mathbf{x}}] \to \mathbb{R}_+$ lisse strictement décroissante ;
- idem pour l'espèce $\mathbf{y}$.

Taux de croissance

Hypothèses :

(H0) $H_{\mathbf{h}}$ est lisse ;

(H1) $H_{\mathbf{h}}(0,0) > 0$ (croissance spontanée) ;

(H2) $\partial_x H_{\mathbf{h}} > 0$ et $\partial_y H_{\mathbf{h}} < 0$ (compétition) ;

(H3) $\exists A > 0, \quad x \vee y \geq A \Rightarrow H_{\mathbf{h}}(x,y) < 0$ (seuil de dépopulation).

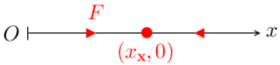
Conséquences :

- un équilibre $x_{\mathbf{x}} > 0$ unique pour l'espèce $\mathbf{x}$ en l'absence de $\mathbf{y}$;
- l'isocline $\mathrm{iso}_{\mathbf{x}} := \{H_{\mathbf{x}} = 0\}$ est le graphe de $g_{\mathbf{x}} : [0, x_{\mathbf{x}}] \to \mathbb{R}_+$ lisse strictement décroissante ;
- idem pour l'espèce $\mathbf{y}$.

Exemple : Lotka-Volterra, $H_{\mathbf{x}} = \alpha(1 - ax - by), \; H_{\mathbf{y}} = \beta(1 - cx - dy)$.

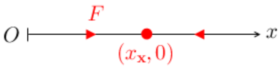
Dynamique

Cas d'une espèce : $x(t) \rightarrow x_{\mathbf{x}}$



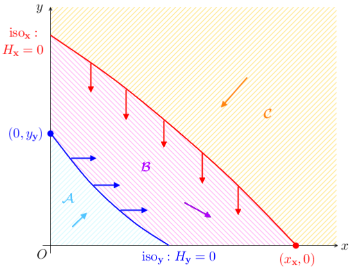
Dynamique

Cas d'une espèce : $x(t) \to x_{\mathbf{x}}$



Cas de deux espèces :

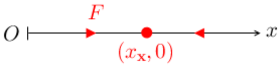
- Les isoclines ne s'intersectent pas



Cas favorable à $\mathbf{x}$: $(x(t), y(t)) \to (x_{\mathbf{x}}, 0)$

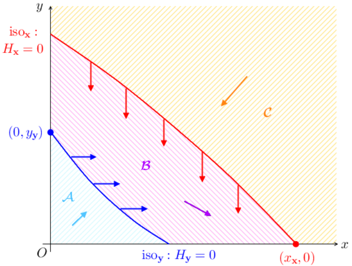
Dynamique

Cas d'une espèce : $x(t) \to x_{\mathbf{x}}$



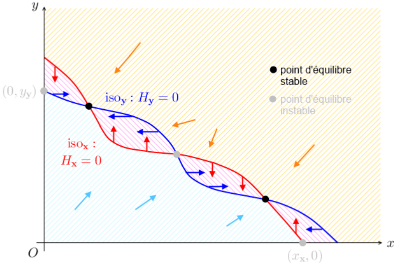
Cas de deux espèces :

- Les isoclines ne s'intersectent pas



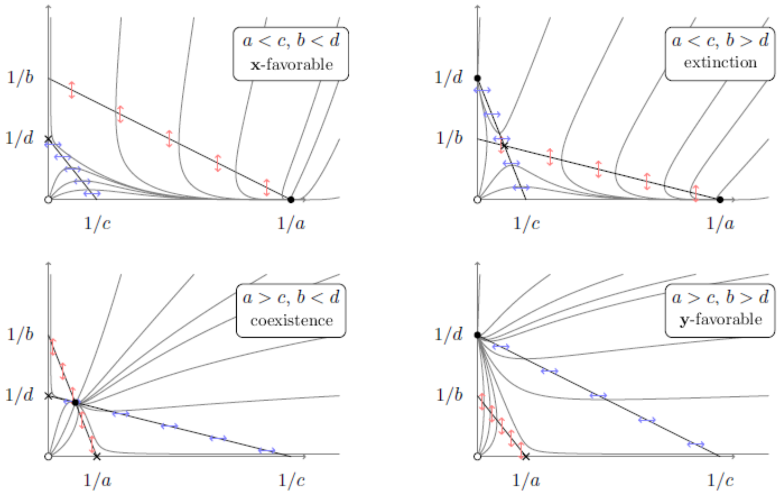
Cas favorable à $\mathbf{x}$: $(x(t), y(t)) \to (x_{\mathbf{x}}, 0)$

- Les isoclines s'intersectent



Convergence vers un équilibre

Lotka-Volterra



Plan

1. Présentation du modèle
   - Compétition en environnement constant
   - Environnement aléatoire
   - Construction du processus

Alternance environnementale

- Champs $F^i,\ i \in \{1, \dots, d\} =: \mathcal{E}$, **favorables à $\mathbf{x}$** ($d \geq 2$).

Alternance environnementale

- Champs $F^i, \ i \in \{1, \ldots, d\} =: \mathcal{E}$, **favorables à** $\mathbf{x}$ $(d \geq 2)$.
- Etat du système $Z_t = (X_t, Y_t, I_t) \in (\mathbb{R}_+)^2 \times \mathcal{E}$.

Alternance environnementale

- Champs $F^i, \ i \in \{1, \dots, d\} =: \mathcal{E}$, **favorables à x** $(d \geq 2)$.
- Etat du système $Z_t = (X_t, Y_t, I_t) \in (\mathbb{R}_+)^2 \times \mathcal{E}$.
- Loi d'évolution :

$$\begin{cases} (\dot{X}_t, \dot{Y}_t) = F^{I_t}(X_t, Y_t), \\ \end{cases}$$

Alternance environnementale

- Champs F^i, $i \in \{1, \dots, d\} =: \mathcal{E}$, **favorables à $\mathbf{x}$** $(d \geq 2)$.
- Etat du système $Z_t = (X_t, Y_t, I_t) \in (\mathbb{R}_+)^2 \times \mathcal{E}$.
- Loi d'évolution :

$$\begin{cases} (\dot{X}_t, \dot{Y}_t) = F^{I_t}(X_t, Y_t), \\ \forall i \neq j, \ \mathbb{P}\Big[I_{t+s} = j \,\Big|\, (Z_u)_{0 \leq u \leq t}, \ I_t = i\Big] = \lambda_{i,j}(X_t, Y_t)\, s + o(s) \end{cases}$$

Alternance environnementale

- Champs F^i, $i \in \{1, \ldots, d\} =: \mathcal{E}$, **favorables à x** ($d \geq 2$).
- Etat du système $Z_t = (X_t, Y_t, I_t) \in (\mathbb{R}_+)^2 \times \mathcal{E}$.
- Loi d'évolution :

$$\begin{cases} (\dot{X}_t, \dot{Y}_t) = F^{I_t}(X_t, Y_t), \\ \forall i \neq j, \ \mathbb{P}\Big[I_{t+s} = j \,\Big|\, (Z_u)_{0 \leq u \leq t}, \ I_t = i \Big] = \lambda_{i,j}(X_t, Y_t)\, s + o(s) \end{cases}$$

où $\lambda_{i,j} \in \mathscr{C}\left(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}+\right)$, vérifiant pour tous $p \in \mathbb{R}_+^2$, $i \neq j$:

$$\exists (i_0 = i, i_1, \ldots, i_n = j) \text{ distincts tels que } \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_{i,j}(p) > 0.$$

Alternance environnementale

- Champs F^i, $i \in \{1, \ldots, d\} =: \mathcal{E}$, **favorables à x** ($d \geq 2$).
- Etat du système $Z_t = (X_t, Y_t, I_t) \in (\mathbb{R}_+)^2 \times \mathcal{E}$.
- Loi d'évolution :

$$\begin{cases} (\dot{X}_t, \dot{Y}_t) = F^{I_t}(X_t, Y_t), \\ \forall i \neq j, \ \mathbb{P}\Big[I_{t+s} = j \,\Big|\, (Z_u)_{0 \leq u \leq t}, \ I_t = i\Big] = \lambda_{i,j}(X_t, Y_t)\, s + o(s) \end{cases}$$

où $\lambda_{i,j} \in \mathscr{C}\left(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}+\right)$, vérifiant pour tous $p \in \mathbb{R}_+^2$, $i \neq j$:

$$\exists (i_0 = i, i_1, \ldots, i_n = j) \text{ distincts tels que } \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_{i,j}(p) > 0.$$

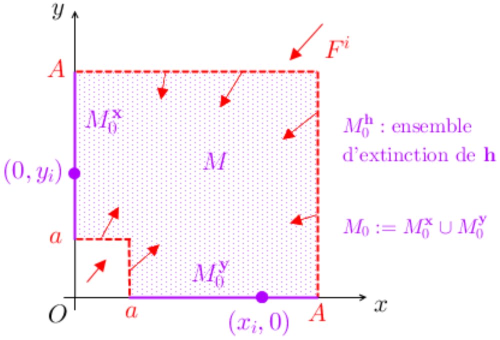
- Le processus (Z_t) est markovien, càdlàg.

Plan

1. Présentation du modèle
   - Compétition en environnement constant
   - Environnement aléatoire
   - Construction du processus

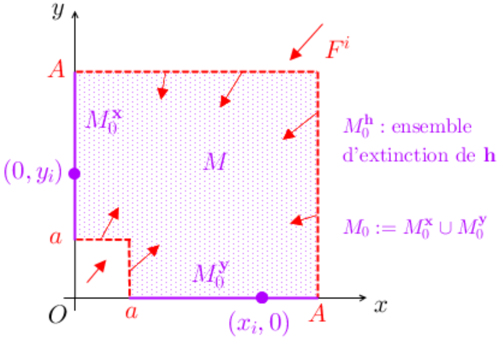
Restriction à un compact

- Si $a > 0$ est assez petit, pour tout $i \in \mathcal{E}$:



Restriction à un compact

- Si $a > 0$ est assez petit, pour tout $i \in \mathcal{E}$:



- $(X_0, Y_0) \neq (0,0) \Rightarrow (Z_t \in \mathbf{M} := M \times \mathcal{E}$ quand t est grand).

Génération de la chaîne squelette

- On fixe $\lambda > \sup_{i\in\mathcal{E},\ p\in M}\left(\sum_{i\neq j}\lambda_{i,j}(p)\right)$.

Génération de la chaîne squelette

- On fixe $\lambda > \sup_{i\in\mathcal{E},\ p\in M}\left(\sum_{i\neq j}\lambda_{i,j}(p)\right)$.
- On définit $\tilde{Z}_n = (\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, \tilde{I}_n)$ inductivement partant de $\tilde{Z}_0 \in \mathbf{M}$.

Génération de la chaîne squelette

- On fixe $\lambda > \sup_{i\in\mathcal{E},\ p\in M}\left(\sum_{i\neq j}\lambda_{i,j}(p)\right)$.
- On définit $\tilde{Z}_n = (\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, \tilde{I}_n)$ inductivement partant de $\tilde{Z}_0 \in \mathbf{M}$. Pour tout $n \geq 1$:
  - on tire $U_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$;

Génération de la chaîne squelette

- On fixe $\lambda > \sup_{i\in\mathcal{E},\ p\in M}\left(\sum_{i\neq j}\lambda_{i,j}(p)\right)$.
- On définit $\tilde{Z}_n = (\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, \tilde{I}_n)$ inductivement partant de $\tilde{Z}_0 \in \mathbf{M}$. Pour tout $n \geq 1$:
  - on tire $U_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$;
  - on pose $(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n) = \Phi_{U_n}^{\tilde{I}_{n-1}}(\tilde{X}_{n-1}, \tilde{Y}_{n-1})$;

Génération de la chaîne squelette

- On fixe $\lambda > \sup_{i\in\mathcal{E},\ p\in M}\left(\sum_{i\neq j}\lambda_{i,j}(p)\right)$.
- On définit $\tilde{Z}_n = (\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, \tilde{I}_n)$ inductivement partant de $\tilde{Z}_0 \in \mathbf{M}$. Pour tout $n \geq 1$:
  - on tire $U_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$;
  - on pose $(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n) = \Phi^{\tilde{I}_{n-1}}_{U_n}(\tilde{X}_{n-1}, \tilde{Y}_{n-1})$;
  - on choisit $\tilde{I}_n = j$ avec probabilité

$$\begin{cases} \lambda_{\tilde{I}_{n-1},j}(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n)/\lambda & \text{si } j \neq \tilde{I}_{n-1}, \\ & \end{cases}$$

Génération de la chaîne squelette

- On fixe $\lambda > \sup_{i\in\mathcal{E},\ p\in M}\left(\sum_{i\neq j}\lambda_{i,j}(p)\right)$.
- On définit $\tilde{Z}_n = (\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, \tilde{I}_n)$ inductivement partant de $\tilde{Z}_0 \in \mathbf{M}$. Pour tout $n \geq 1$:
  - on tire $U_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$;
  - on pose $(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n) = \Phi_{U_n}^{\tilde{I}_{n-1}}(\tilde{X}_{n-1}, \tilde{Y}_{n-1})$;
  - on choisit $\tilde{I}_n = j$ avec probabilité

$$\begin{cases} \lambda_{\tilde{I}_{n-1},j}(\tilde{X}_n,\tilde{Y}_n)/\lambda & \text{si } j \neq \tilde{I}_{n-1}, \\ 1 - \sum_{j\neq \tilde{I}_{n-1}} \lambda_{\tilde{I}_{n-1},j}(\tilde{X}_n,\tilde{Y}_n)/\lambda & \text{si } j = \tilde{I}_{n-1}. \end{cases}$$

Génération du processus

- $T_n := U_1 + \ldots + U_n$;

Génération du processus

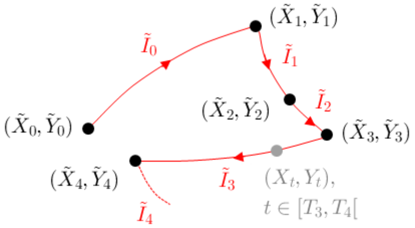
- $T_n := U_1 + \ldots + U_n$;
- Interpolation :

$$\forall t \in [T_n, T_{n+1}[, \quad Z_t = \left(\Phi^{\tilde{I}_n}_{t-T_n}(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n), \tilde{I}_n\right).$$

Génération du processus

- $T_n := U_1 + \ldots + U_n$;
- Interpolation :

$$\forall t \in [T_n, T_{n+1}[, \quad Z_t = \left(\Phi^{\tilde{I}_n}_{t-T_n}(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n), \tilde{I}_n\right).$$



Propriétés

- Transitions $\tilde{P}$ (chaîne), $(P_t)_{t\geq 0}$ (processus) **felleriennes** :

Propriétés

- Transitions $\tilde{P}$ (chaîne), $(P_t)_{t\geq 0}$ (processus) **felleriennes** :
  - $\mathbb{P}_z(\tilde{Z}_1 \in \cdot)$, $\mathbb{P}_z(Z_t \in \cdot)$ continues en $z \in \mathbf{M}$;

Propriétés

- Transitions $\tilde{P}$ (chaîne), $(P_t)_{t\geq 0}$ (processus) **felleriennes** :
  - $\mathbb{P}_z(\tilde{Z}_1 \in \cdot)$, $\mathbb{P}_z(Z_t \in \cdot)$ continues en $z \in \mathbf{M}$;
  - Générateur $\mathcal{L}$: pour $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{M})$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(x,y,i) = \mathrm{D}f^i(x,y)\cdot F^i(x,y)\\ + \sum_{j\in\mathcal{E}\setminus\{i\}} \lambda_{i,j}(x,y)\left[f^j(x,y) - f^i(x,y)\right]\end{aligned}$$

Propriétés

- Transitions $\tilde{P}$ (chaîne), $(P_t)_{t\geq 0}$ (processus) **felleriennes** :
  - $\mathbb{P}_z(\tilde{Z}_1 \in \cdot)$, $\mathbb{P}_z(Z_t \in \cdot)$ continues en $z \in \mathbf{M}$;
  - Générateur $\mathcal{L}$: pour $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{M})$,

$$\mathcal{L}f(x,y,i) = \mathrm{D}f^i(x,y) \cdot F^i(x,y) + \sum_{j \in \mathcal{E}\setminus\{i\}} \lambda_{i,j}(x,y)\left[f^j(x,y) - f^i(x,y)\right]$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_t f(x,y,i)\Big|_{t=0}.$$

Plan

2 Dynamiques en temps long

Plan

2. Dynamiques en temps long
   - Préliminaires
   - Extinctions
   - Persistance

Notions

- **Mesure empirique :** $\Pi_t : B \mapsto \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{1}_B(Z_s)\mathrm{d}s.$

Notions

- **Mesure empirique :** $\Pi_t : B \mapsto \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{1}_B(Z_s)\mathrm{d}s$.
- **Ensemble ω-limite :** $\omega_{lim} = \bigcap_{t\in\mathbb{R}_+}\overline{\{(X_s, Y_s),\ s \geq t\}}$.

Notions

- **Mesure empirique :** $\Pi_t : B \mapsto \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{1}_B(Z_s)\mathrm{d}s$.
- **Ensemble ω-limite :** $\omega_{lim} = \cap_{t\in\mathbb{R}_+}\overline{\{(X_s,Y_s),\ s\geq t\}}$.
- **Lois invariantes :**

Notions

- **Mesure empirique :** $\Pi_t : B \mapsto \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{1}_B(Z_s)\mathrm{d}s$.
- **Ensemble ω-limite :** $\omega_{lim} = \cap_{t\in\mathbb{R}_+}\overline{\{(X_s, Y_s),\ s \geq t\}}$.
- **Lois invariantes :**

  Pour $\mathbf{D} \in \{\mathbf{M}, \mathbf{M}\backslash\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}}, \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}\}$ absorbant :

Notions

- **Mesure empirique :** $\Pi_t : B \mapsto \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{1}_B(Z_s)\mathrm{d}s$.
- **Ensemble ω-limite :** $\omega_{lim} = \cap_{t\in\mathbb{R}_+}\overline{\{(X_s,Y_s),\ \ s \geq t\}}$.
- **Lois invariantes :**

  Pour $\mathbf{D} \in \{\mathbf{M}, \mathbf{M}\backslash\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}}, \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}\}$ absorbant :

  - $\tilde{\mathcal{P}}_{inv}(\mathbf{D}) : \mu\tilde{P} = \mu, \quad \mathcal{P}_{inv}(\mathbf{D}) : \mu P_t = \mu \quad (\mu \in \mathcal{P}_1(\mathbf{D}))$.

Notions

- **Mesure empirique :** $\Pi_t : B \mapsto \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{1}_B(Z_s)\mathrm{d}s$.
- **Ensemble ω-limite :** $\omega_{lim} = \cap_{t\in\mathbb{R}_+}\overline{\{(X_s, Y_s),\ s \geq t\}}$.
- **Lois invariantes :**

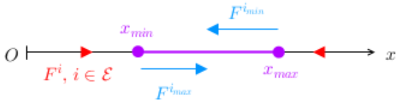
  Pour $\mathbf{D} \in \{\mathbf{M}, \mathbf{M}\backslash\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}}, \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}\}$ absorbant :

  - $\tilde{\mathcal{P}}_{inv}(\mathbf{D}) : \mu\tilde{P} = \mu, \quad \mathcal{P}_{inv}(\mathbf{D}) : \mu P_t = \mu \quad (\mu \in \mathcal{P}_1(\mathbf{D}))$.
  - homéomorphisme $\tilde{\mathcal{P}}_{inv}(\mathbf{D}) \leftrightarrow \mathcal{P}_{inv}(\mathbf{D})$

    préservant le support, l'absolue continuité p/r à Lebesgue

Sur les ensembles d'extinction

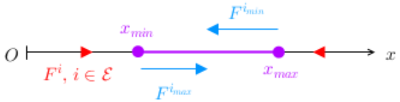
Théorème ergodique.



(Analogie avec les chaînes de Markov sur espace fini)

Sur les ensembles d'extinction

Théorème ergodique. $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}) = \{\mu_{\mathbf{y}}\}$, et :

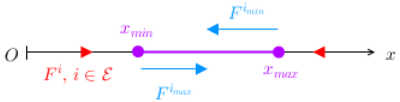


(Analogie avec les chaînes de Markov sur espace fini)

Sur les ensembles d'extinction

Théorème ergodique. $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}) = \{\mu_{\mathbf{y}}\}$, et :

- $\text{supp}(\mu_{\mathbf{h}}) = [x_{min}, x_{max}] \times \{0\} \times \mathcal{E}$;

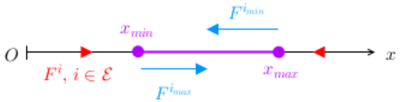


(Analogie avec les chaînes de Markov sur espace fini)

Sur les ensembles d'extinction

Théorème ergodique. $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}) = \{\mu_{\mathbf{y}}\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\mu_{\mathbf{h}}) = [x_{min}, x_{max}] \times \{0\} \times \mathcal{E}$;
- Si $Z_0 \in \mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$ alors presque sûrement :



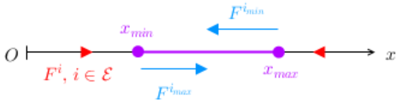
(Analogie avec les chaînes de Markov sur espace fini)

Sur les ensembles d'extinction

Théorème ergodique. $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}) = \{\mu_{\mathbf{y}}\}$, et :

- $\text{supp}(\mu_{\mathbf{h}}) = [x_{min}, x_{max}] \times \{0\} \times \mathcal{E}$;
- Si $Z_0 \in \mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$ alors presque sûrement :
  - $\Pi_t \to \mu_{\mathbf{h}}$ étroitement, i.e. :

$$\forall f \in \mathscr{C}(\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}), \quad \frac{1}{t}\int_0^t f(Z_s)\mathrm{d}s \to \int_{\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}} f \mathrm{d}\mu_{\mathbf{y}};$$



(Analogie avec les chaînes de Markov sur espace fini)

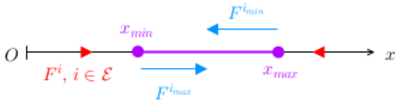
Sur les ensembles d'extinction

Théorème ergodique. $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}) = \{\mu_{\mathbf{y}}\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\mu_{\mathbf{h}}) = [x_{min}, x_{max}] \times \{0\} \times \mathcal{E}$;
- Si $Z_0 \in \mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$ alors presque sûrement :
  - $\Pi_t \to \mu_{\mathbf{h}}$ étroitement, i.e. :

$$\forall f \in \mathscr{C}(\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}), \quad \frac{1}{t}\int_0^t f(Z_s)\mathrm{d}s \to \int_{\mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}} f \mathrm{d}\mu_{\mathbf{y}};$$

  - $\omega_{lim} = [x_{min}, x_{max}] \times \{0\}$.



(Analogie avec les chaînes de Markov sur espace fini)

Taux d'invasion

✏ **Taux d'invasion moyen** de $\mathbf{h}$: $\Lambda_{\mathbf{h}} := \mu_{\mathbf{h}}(H_{\mathbf{h}})$.

Taux d'invasion

- **Taux d'invasion moyen** de $\mathbf{h}$: $\Lambda_{\mathbf{h}} := \mu_{\mathbf{h}}(H_{\mathbf{h}})$.
- Interprétation :

  T grand, Y_0 petit $\Rightarrow (\log Y_T - \log Y_0)/T \approx \Lambda_{\mathbf{y}}$ (gde proba).

Taux d'invasion

- **Taux d'invasion moyen** de $\mathbf{h}$: $\Lambda_{\mathbf{h}} := \mu_{\mathbf{h}}(H_{\mathbf{h}})$.
- Interprétation :

  T grand, Y_0 petit $\Rightarrow (\log Y_T - \log Y_0)/T \approx \Lambda_{\mathbf{y}}$ (gde proba).
- $\Lambda_{\mathbf{h}} > 0 \Rightarrow \mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$ répulsive (e.g. $\mathbf{h} = \mathbf{x}$ en env$^{\mathrm{t}}$ constant).

Taux d'invasion

- **Taux d'invasion moyen** de $\mathbf{h}$: $\Lambda_{\mathbf{h}} := \mu_{\mathbf{h}}(H_{\mathbf{h}})$.
- Interprétation :

  T grand, Y_0 petit $\Rightarrow (\log Y_T - \log Y_0)/T \approx \Lambda_{\mathbf{y}}$ (gde proba).
- $\Lambda_{\mathbf{h}} > 0 \Rightarrow \mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$ répulsive (e.g. $\mathbf{h} = \mathbf{x}$ en env$^{\text{t}}$ constant).
- $\Lambda_{\mathbf{h}} < 0 \Rightarrow \mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$ attractive (e.g. $\mathbf{h} = \mathbf{y}$ ________________).

Taux d'invasion

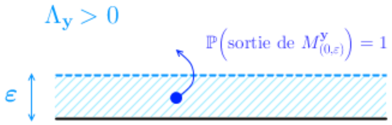
- **Taux d'invasion moyen** de $\mathbf{h}$: $\Lambda_{\mathbf{h}} := \mu_{\mathbf{h}}(H_{\mathbf{h}})$.
- Interprétation :

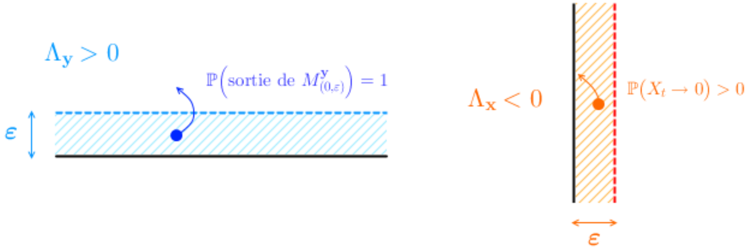
  T grand, Y_0 petit $\Rightarrow (\log Y_T - \log Y_0)/T \approx \Lambda_{\mathbf{y}}$ (gde proba).
- $\Lambda_{\mathbf{h}} > 0 \Rightarrow \mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$ répulsive (e.g. $\mathbf{h} = \mathbf{x}$ en env$^{\mathrm{t}}$ constant).
- $\Lambda_{\mathbf{h}} < 0 \Rightarrow \mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$ attractive (e.g. $\mathbf{h} = \mathbf{y}$ ____________).
- Peut-on avoir $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$? $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$?

Taux d'invasion

- **Taux d'invasion moyen** de $\mathbf{h}$: $\Lambda_{\mathbf{h}} := \mu_{\mathbf{h}}(H_{\mathbf{h}})$.
- Interprétation :

  T grand, Y_0 petit $\Rightarrow (\log Y_T - \log Y_0)/T \approx \Lambda_{\mathbf{y}}$ (gde proba).
- $\Lambda_{\mathbf{h}} > 0 \Rightarrow \mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$ répulsive (e.g. $\mathbf{h} = \mathbf{x}$ en env^{t} constant).
- $\Lambda_{\mathbf{h}} < 0 \Rightarrow \mathbf{M}_0^{\mathbf{h}}$ attractive (e.g. $\mathbf{h} = \mathbf{y}$ _______________).
- Peut-on avoir $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$? $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$? Oui !


$\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$
$\mathbb{P}\Big(\text{sortie de } M^{\mathbf{y}}_{(0,\varepsilon)}\Big) = 1$
ε


$\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$
$\mathbb{P}\left(\text{sortie de } M^{\mathbf{y}}_{(0,\varepsilon)}\right) = 1$
ε
$\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$
$\mathbb{P}(X_t \to 0) > 0$
ε

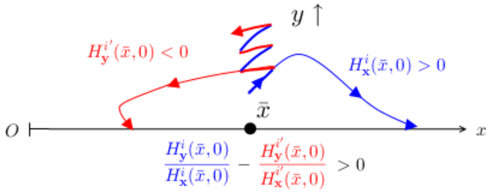
Rendre $\mathbf{y}$ invasive

- A jeu d'environnements fixés :

Rendre $\mathbf{y}$ invasive

- A jeu d'environnements fixés :

  $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$ possible $\Leftrightarrow \exists i, i' \in \mathcal{E},\ \exists \bar{x} \in [x_{min}, x_{max}]$ comme suit :



Accessibilité

- $\mathcal{O}$ **accessible** depuis p si

$$\exists (u_1, i_1), \ldots, (u_n, i_n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{E}, \quad \Phi_{u_n}^{i_{n-1}} \circ \ldots \circ \Phi_{u_1}^{i_0}(p) \in \mathcal{O}.$$

Accessibilité

- $\mathcal{O}$ **accessible** depuis p si

$$\exists (u_1, i_1), \ldots, (u_n, i_n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{E}, \quad \Phi_{u_n}^{i_{n-1}} \circ \ldots \circ \Phi_{u_1}^{i_0}(p) \in \mathcal{O}.$$

- $q \in \mathrm{Acc}(p)$ si tout ouvert $\mathcal{O} \ni q$ est accessible depuis p

Accessibilité

- $\mathcal{O}$ **accessible** depuis p si

$$\exists (u_1, i_1), \ldots, (u_n, i_n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{E}, \quad \Phi_{u_n}^{i_{n-1}} \circ \ldots \circ \Phi_{u_1}^{i_0}(p) \in \mathcal{O}.$$

- $q \in \mathrm{Acc}(p)$ si tout ouvert $\mathcal{O} \ni q$ est accessible depuis p
- $\Gamma := \bigcap_{p \in M \setminus M_0} \mathrm{Acc}(p) = \{$pts accessibles depuis tout $M \setminus M_0\}$, de plus :

Accessibilité

- $\mathcal{O}$ **accessible** depuis p si

$$\exists (u_1, i_1), \ldots, (u_n, i_n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{E}, \quad \Phi_{u_n}^{i_{n-1}} \circ \ldots \circ \Phi_{u_1}^{i_0}(p) \in \mathcal{O}.$$

- $q \in \mathrm{Acc}(p)$ si tout ouvert $\mathcal{O} \ni q$ est accessible depuis p
- $\Gamma := \bigcap_{p \in M \backslash M_0} \mathrm{Acc}(p) = \{$pts accessibles depuis tout $M \backslash M_0\}$, de plus :
  - $\Gamma \supseteq [x_{min}, x_{max}] \times \{0\}$;

Accessibilité

- $\mathcal{O}$ **accessible** depuis p si

$$\exists (u_1, i_1), \ldots, (u_n, i_n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{E}, \quad \Phi_{u_n}^{i_{n-1}} \circ \ldots \circ \Phi_{u_1}^{i_0}(p) \in \mathcal{O}.$$

- $q \in \mathrm{Acc}(p)$ si tout ouvert $\mathcal{O} \ni q$ est accessible depuis p
- $\Gamma := \bigcap_{p \in M \setminus M_0} \mathrm{Acc}(p) = \{$pts accessibles depuis tout $M \setminus M_0\}$, de plus :
    - $\Gamma \supseteq [x_{min}, x_{max}] \times \{0\}$;
    - Γ est fermé, positivement invariant par la dynamique ;

Accessibilité

- $\mathcal{O}$ **accessible** depuis p si

$$\exists (u_1, i_1), \ldots, (u_n, i_n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{E}, \quad \Phi_{u_n}^{i_{n-1}} \circ \ldots \circ \Phi_{u_1}^{i_0}(p) \in \mathcal{O}.$$

- $q \in \mathrm{Acc}(p)$ si tout ouvert $\mathcal{O} \ni q$ est accessible depuis p
- $\Gamma := \bigcap_{p \in M \setminus M_0} \mathrm{Acc}(p) = \{$pts accessibles depuis tout $M \setminus M_0\}$, de plus :
  - $\Gamma \supseteq [x_{min}, x_{max}] \times \{0\}$;
  - Γ est fermé, positivement invariant par la dynamique ;
  - soit $\Gamma \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$, soit $\Gamma \supseteq \{0\} \times [y_{min}, y_{max}]$.

Plan

Théorème (extinction de $\mathbf{y}$). Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} < 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} > 0$.

Théorème (extinction de $\mathbf{y}$). Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} < 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} > 0$.

Si $Z_0 \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$, alors p.s. :

- $\limsup_{t \to +\infty} \log Y_t / t \leq \Lambda_{\mathbf{y}}$;

Théorème (extinction de $\mathbf{y}$). Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} < 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} > 0$.

Si $Z_0 \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$, alors p.s. :

- $\limsup_{t\to+\infty} \log Y_t/t \leq \Lambda_{\mathbf{y}}$;
- $\Pi_t \to \mu_{\mathbf{y}}$ étroitement ;

Théorème (extinction de $\mathbf{y}$). Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} < 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} > 0$.

Si $Z_0 \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$, alors p.s. :

- $\limsup_{t \to +\infty} \log Y_t / t \leq \Lambda_{\mathbf{y}}$;
- $\Pi_t \to \mu_{\mathbf{y}}$ étroitement ;
- $\omega_{lim} = [x_{min}, x_{max}] \times \{0\}$.

Théorème (extinction de $\mathbf{y}$). Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} < 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} > 0$.

Si $Z_0 \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$, alors p.s. :

$$\left.\begin{array}{l} \limsup_{t\to+\infty} \log Y_t/t \le \Lambda_{\mathbf{y}} \,; \\ \Pi_t \to \mu_{\mathbf{y}} \text{ étroitement} \,; \\ \omega_{lim} = [x_{min}, x_{max}] \times \{0\}. \end{array}\right\} \mathrm{Ext}_{\mathbf{y}}$$

Extinction de $\mathbf{x}$

Théorème (extinction de $\mathbf{x}$). Supposons $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$, $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$ et $\Gamma \cap M_0^{\mathbf{x}} \neq \emptyset$.

Extinction de $\mathbf{x}$

Théorème (extinction de $\mathbf{x}$). Supposons $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$, $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$ et $\Gamma \cap M_0^{\mathbf{x}} \neq \emptyset$. Si $Z_0 \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$, alors p.s. :

- $\limsup_{t\to+\infty} \log X_t/t \leq \Lambda_{\mathbf{x}}$;

Extinction de $\mathbf{x}$

Théorème (extinction de $\mathbf{x}$). Supposons $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$, $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$ et $\Gamma \cap M_0^{\mathbf{x}} \neq \emptyset$. Si $Z_0 \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$, alors p.s. :

- $\limsup_{t \to +\infty} \log X_t / t \leq \Lambda_{\mathbf{x}}$;
- $\Pi_t \to \mu_{\mathbf{x}}$ étroitement ;

Extinction de $\mathbf{x}$

Théorème (extinction de $\mathbf{x}$). Supposons $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$, $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$ et $\Gamma \cap M_0^{\mathbf{x}} \neq \emptyset$. Si $Z_0 \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$, alors p.s. :

- $\limsup_{t \to +\infty} \log X_t / t \leq \Lambda_{\mathbf{x}}$;
- $\Pi_t \to \mu_{\mathbf{x}}$ étroitement ;
- $\omega_{lim} = \{0\} \times [y_{min}, y_{max}]$.

Extinction de $\mathbf{x}$

Théorème (extinction de $\mathbf{x}$). Supposons $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$, $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$ et $\Gamma \cap M_0^{\mathbf{x}} \neq \emptyset$. Si $Z_0 \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$, alors p.s. :

$$\left.\begin{array}{l} \limsup_{t\to+\infty} \log X_t/t \leq \Lambda_{\mathbf{x}}\ ; \\ \Pi_t \to \mu_{\mathbf{x}} \text{ étroitement ;} \\ \omega_{lim} = \{0\} \times [y_{min}, y_{max}]. \end{array}\right\} \mathrm{Ext}_{\mathbf{x}}$$

Extinction d'une espèce

Théorème (extinction de $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{y}$). Supposons $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$, $\Lambda_{\mathbf{y}} < 0$.

Extinction d'une espèce

Théorème (extinction de $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{y}$). Supposons $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$, $\Lambda_{\mathbf{y}} < 0$. Si $Z_0 = (p, i) \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$, alors $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}_{\mathbf{x}} \cup \mathrm{Ext}_{\mathbf{y}}) = 1$.

Extinction d'une espèce

Théorème (extinction de $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{y}$). Supposons $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$, $\Lambda_{\mathbf{y}} < 0$. Si $Z_0 = (p, i) \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$, alors $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}_{\mathbf{x}} \cup \mathrm{Ext}_{\mathbf{y}}) = 1$. De plus :

- $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}_{\mathbf{y}}) > 0$;

Extinction d'une espèce

Théorème (extinction de $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{y}$). Supposons $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$, $\Lambda_{\mathbf{y}} < 0$. Si $Z_0 = (p, i) \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$, alors $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}_{\mathbf{x}} \cup \mathrm{Ext}_{\mathbf{y}}) = 1$. De plus :

- $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}_{\mathbf{y}}) > 0$;
- $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}_{\mathbf{x}}) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Acc}(p) \cap M_0^{\mathbf{x}} \neq \emptyset$.

Plan

2. Dynamiques en temps long
   - Préliminaires
   - Extinctions
   - Persistance

Persistance sûre

Théorème (persistance sûre). Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} > 0$.

Persistance sûre

Théorème (persistance sûre). Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} > 0$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

Persistance sûre

Théorème (persistance sûre). Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} > 0$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\Pi) = \Gamma \times \mathcal{E}$, et $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$;

Persistance sûre

Théorème (persistance sûre). Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} > 0$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\Pi) = \Gamma \times \mathcal{E}$, et $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$;
- $\exists \theta > 0, \quad \int_{\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0} \left(x^{-\theta} + y^{-\theta}\right) \mathrm{d}\Pi < +\infty$;

Persistance sûre

Théorème (persistance sûre). Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} > 0$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M}\backslash\mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\Pi) = \Gamma \times \mathcal{E}$, et $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$;
- $\exists\theta > 0, \quad \int_{\mathbf{M}\backslash\mathbf{M}_0} \left(x^{-\theta} + y^{-\theta}\right) \mathrm{d}\Pi < +\infty$;
- Si $Z_0 \in \mathbf{M}\backslash\mathbf{M}_0$ alors :
  - $\Pi_t \to \Pi$ étroitement,

Persistance sûre

Théorème (persistance sûre). Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} > 0$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M}\backslash\mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\Pi) = \Gamma \times \mathcal{E}$, et $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$;
- $\exists\theta > 0, \quad \int_{\mathbf{M}\backslash\mathbf{M}_0} \left(x^{-\theta} + y^{-\theta}\right) \mathrm{d}\Pi < +\infty$;
- Si $Z_0 \in \mathbf{M}\backslash\mathbf{M}_0$ alors :
  - $\Pi_t \to \Pi$ étroitement,
  - $\omega_{lim} = \Gamma$.

Persistance possible

Théorème $\star$ (persistance ou extinction de $\mathbf{x}$).

Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ et $\Gamma \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$.

Persistance possible

Théorème $\star$ (persistance ou extinction de $\mathbf{x}$).

Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ et $\Gamma \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

Persistance possible

Théorème $\star$ (persistance ou extinction de $\mathbf{x}$).

Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ et $\Gamma \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\Pi) = \Gamma \times \mathcal{E}$, et $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$;

Persistance possible

Théorème $\star$ (persistance ou extinction de $\mathbf{x}$).

Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ et $\Gamma \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\Pi) = \Gamma \times \mathcal{E}$, et $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$;
- $\exists \theta > 0, \quad \int_{\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0} y^{-\theta} \, \mathrm{d}\Pi < +\infty$;

Persistance possible

Théorème $\star$ (persistance ou extinction de $\mathbf{x}$).

Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ et $\Gamma \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\Pi) = \Gamma \times \mathcal{E}$, et $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$;
- $\exists \theta > 0, \quad \int_{\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0} y^{-\theta} \, \mathrm{d}\Pi < +\infty$;
- $\Xi := \{p \in M : \mathrm{Acc}(p) \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset\}$ est fermé, pos$^{\mathrm{t}}$ invariant ;

Persistance possible

Théorème $\star$ (persistance ou extinction de $\mathbf{x}$).

Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ et $\Gamma \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\Pi) = \Gamma \times \mathcal{E}$, et $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$;
- $\exists \theta > 0, \quad \int_{\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0} y^{-\theta} \, \mathrm{d}\Pi < +\infty$;
- $\Xi := \{p \in M : \mathrm{Acc}(p) \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset\}$ est fermé, pos^{t} invariant ;
- Supposons $Z_0 = (p, i) \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$.

Persistance possible

Théorème $\star$ (persistance ou extinction de $\mathbf{x}$).

Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ et $\Gamma \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\Pi) = \Gamma \times \mathcal{E}$, et $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$;
- $\exists \theta > 0, \quad \int_{\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0} y^{-\theta} \, \mathrm{d}\Pi < +\infty$;
- $\Xi := \{p \in M : \mathrm{Acc}(p) \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset\}$ est fermé, pos^t invariant ;
- Supposons $Z_0 = (p, i) \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$.

  Si $p \in \Xi$ alors :

Persistance possible

Théorème $\star$ (persistance ou extinction de $\mathbf{x}$).

Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ et $\Gamma \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

- $\operatorname{supp}(\Pi) = \Gamma \times \mathcal{E}$, et $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$;
- $\exists \theta > 0, \quad \int_{\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0} y^{-\theta} \, d\Pi < +\infty$;
- $\Xi := \{p \in M : \operatorname{Acc}(p) \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset\}$ est fermé, pos^{t} invariant ;
- Supposons $Z_0 = (p, i) \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$.

  Si $p \in \Xi$ alors :

  - $\Pi_t \to \Pi$ étroitement,

Persistance possible

Théorème $\star$ (persistance ou extinction de $\mathbf{x}$).

Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ et $\Gamma \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\Pi) = \Gamma \times \mathcal{E}$, et $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$;
- $\exists \theta > 0, \quad \int_{\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0} y^{-\theta} \, \mathrm{d}\Pi < +\infty$;
- $\Xi := \{p \in M : \mathrm{Acc}(p) \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset\}$ est fermé, pos$^{\mathrm{t}}$ invariant ;
- Supposons $Z_0 = (p, i) \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$.

  Si $p \in \Xi$ alors :

  - $\Pi_t \to \Pi$ étroitement,
  - $\omega_{lim} = \Gamma$;

Persistance possible

Théorème $\star$ (persistance ou extinction de $\mathbf{x}$).

Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ et $\Gamma \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\Pi) = \Gamma \times \mathcal{E}$, et $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$;
- $\exists \theta > 0, \quad \int_{\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0} y^{-\theta} \, \mathrm{d}\Pi < +\infty$;
- $\Xi := \{p \in M : \mathrm{Acc}(p) \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset\}$ est fermé, pos$^{\mathrm{t}}$ invariant ;
- Supposons $Z_0 = (p, i) \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$.

  Si $p \in \Xi$ alors :

  $$\left.\begin{array}{l} \triangleright\ \Pi_t \to \Pi \text{ étroitement,} \\ \triangleright\ \omega_{lim} = \Gamma\,; \end{array}\right\} \mathrm{Pers}$$

Persistance possible

Théorème $\star$ (persistance ou extinction de $\mathbf{x}$).

Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ et $\Gamma \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\Pi) = \Gamma \times \mathcal{E}$, et $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$;
- $\exists \theta > 0, \quad \int_{\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0} y^{-\theta} \, \mathrm{d}\Pi < +\infty$;
- $\Xi := \{p \in M : \mathrm{Acc}(p) \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset\}$ est fermé, pos$^{\mathrm{t}}$ invariant ;
- Supposons $Z_0 = (p, i) \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$.

Si $p \in \Xi$ alors :	Si $p \notin \Xi$ alors :
$\left.\begin{array}{l} \triangleright\ \Pi_t \to \Pi \text{ étroitement,} \\ \triangleright\ \omega_{lim} = \Gamma \,; \end{array}\right\}$ Pers	.

Persistance possible

Théorème $\star$ (persistance ou extinction de $\mathbf{x}$).

Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ et $\Gamma \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\Pi) = \Gamma \times \mathcal{E}$, et $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$;
- $\exists \theta > 0, \quad \int_{\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0} y^{-\theta} \, \mathrm{d}\Pi < +\infty$;
- $\Xi := \{p \in M : \mathrm{Acc}(p) \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset\}$ est fermé, pos^t invariant ;
- Supposons $Z_0 = (p, i) \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$.

Si $p \in \Xi$ alors :

- $\Pi_t \to \Pi$ étroitement,
- $\omega_{lim} = \Gamma$;

$\Bigg\}$ Pers

Si $p \notin \Xi$ alors :

- $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}_{\mathbf{x}}) > 0$,

.

Persistance possible

Théorème $\star$ (persistance ou extinction de $\mathbf{x}$).

Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ et $\Gamma \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\Pi) = \Gamma \times \mathcal{E}$, et $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$;
- $\exists \theta > 0, \quad \int_{\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0} y^{-\theta} \, \mathrm{d}\Pi < +\infty$;
- $\Xi := \{p \in M : \mathrm{Acc}(p) \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset\}$ est fermé, pos^t invariant ;
- Supposons $Z_0 = (p, i) \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$.

Si $p \in \Xi$ alors :

- $\Pi_t \to \Pi$ étroitement,
- $\omega_{lim} = \Gamma$;

$\Bigg\}$ Pers

Si $p \notin \Xi$ alors :

- $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}_{\mathbf{x}}) > 0$,
- $\mathbb{P}(\mathrm{Pers}) > 0$,

.

Persistance possible

Théorème $\star$ (persistance ou extinction de $\mathbf{x}$).

Supposons $\Lambda_{\mathbf{y}} > 0$, $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0$ et $\Gamma \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset$.

Alors $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, et :

- $\mathrm{supp}(\Pi) = \Gamma \times \mathcal{E}$, et $\mathring{\Gamma} \neq \emptyset$;
- $\exists \theta > 0, \quad \int_{\mathbf{M}\backslash\mathbf{M}_0} y^{-\theta}\, \mathrm{d}\Pi < +\infty$;
- $\Xi := \{p \in M : \mathrm{Acc}(p) \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}} = \emptyset\}$ est fermé, pos$^{\mathrm{t}}$ invariant ;
- Supposons $Z_0 = (p, i) \in \mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0$.

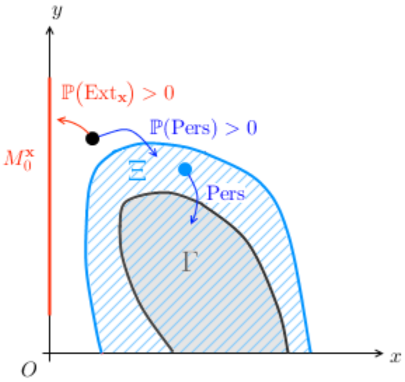
Si $p \in \Xi$ alors :

- $\Pi_t \to \Pi$ étroitement,
- $\omega_{lim} = \Gamma$;

$\Big\}$ Pers

Si $p \notin \Xi$ alors :

- $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}_{\mathbf{x}}) > 0$,
- $\mathbb{P}(\mathrm{Pers}) > 0$,
- $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}_{\mathbf{x}} \cup \mathrm{Pers}) = 1$.

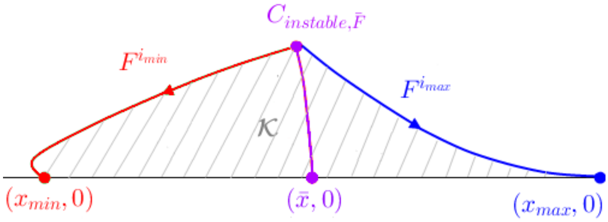

y
$\mathbb{P}(\mathrm{Ext}_{\mathbf{x}}) > 0$
$\mathbb{P}(\mathrm{Pers}) > 0$
$M_0^{\mathbf{x}}$
Ξ
Pers
Γ
O
x

Plan

3 Topologie de Γ

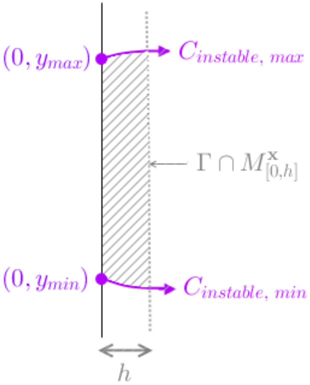
Γ au voisinage de $M_0^{\mathbf{y}}$

- Γ contient un domaine de Jordan $\mathcal{K}$ comme suit :



Γ au voisinage de $M_0^{\mathbf{x}}$

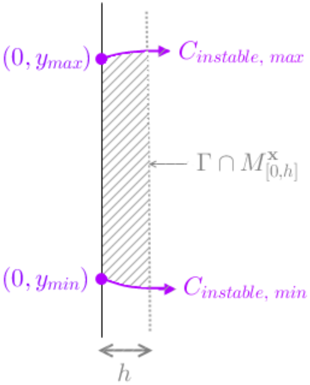
- Si $\Gamma \supseteq \{0\} \times [y_{min}, y_{max}]$:



Γ au voisinage de $M_0^{\mathbf{x}}$

- Si $\Gamma \supseteq \{0\} \times [y_{min}, y_{max}]$:

  $\Rightarrow \Gamma$ se rétracte (par déformation) sur $\Gamma \backslash M^{\mathbf{x}}_{[0,h[}$



Autres propriétés

- Γ est contractile $\Rightarrow$ connexe par arcs, simplement connexe ; (rétraction de $\Gamma \backslash \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}}$ sur $(0, x_{min})$ le long de $F^{i_{min}}$)

Autres propriétés

- Γ est contractile $\Rightarrow$ connexe par arcs, simplement connexe ; (rétraction de $\Gamma \backslash \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}}$ sur $(0, x_{min})$ le long de $F^{i_{min}}$)
- $\Gamma = \overline{\mathring{\Gamma}}$;

Autres propriétés

- Γ est contractile $\Rightarrow$ connexe par arcs, simplement connexe ; (rétraction de $\Gamma \backslash \mathbf{M}_0^{\mathbf{x}}$ sur $(0, x_{min})$ le long de $F^{i_{min}}$)
- $\Gamma = \overline{\mathring{\Gamma}}$;
- $\Gamma \cap M_0^{\mathbf{y}} = [x_{min}, x_{max}] \times \{0\}$.

Plan

4 Eléments de preuve $(\star)$

Conditions de dérive

Cas où $\Lambda_{\mathbf{x}} < 0,\ \Lambda_{\mathbf{y}} > 0$ **:**

- **Lemme (drift).** Soient $0 < \alpha_{\mathbf{h}} < |\Lambda_{\mathbf{h}}|,\ h \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$.
  Il existe T, θ, $\epsilon > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que :

$\forall z = (x, y, i) \in \mathbf{M}^{\mathbf{x}}_{]0,\varepsilon[}$,	$\forall z = (x, y, i) \in \mathbf{M}^{\mathbf{y}}_{]0,\varepsilon[}$,
$\frac{\mathbb{E}_z(\log X_T) - \log x}{T} \leq -\alpha_{\mathbf{x}} \quad (\mathrm{L}_{\mathbf{x}})$	$\frac{\mathbb{E}_z(\log Y_T) - \log y}{T} \geq \alpha_{\mathbf{y}} \quad (\mathrm{L}_{\mathbf{y}})$
$\mathbb{E}_z(X_T^{\theta}) \leq \rho x^{\theta} \quad (\mathrm{G}_{\mathbf{x}})$	$\mathbb{E}_z(Y_T^{-\theta}) \leq \rho y^{-\theta} \quad (\mathrm{G}_{\mathbf{y}})$

Répulsion et attraction

- Supposons $Y_0 = y \in]0, \varepsilon[$. Soit $M_n = -\log Y_{nT} + nT\alpha_{\mathbf{y}}$:

$$(\mathrm{L}_{\mathbf{y}}) \Rightarrow (M_{n \wedge \tau_\epsilon^{\mathbf{y},\mathrm{Out}}}) \text{ sous-martingale}$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau_\varepsilon^{\mathbf{y},\mathrm{Out}}) \leq -\log y < +\infty.$$

- Supposons $X_0 = x \in]0, \varepsilon[$. Soit $W_n = X_{nT}^\theta$:

$$(\mathrm{G}_{\mathbf{x}}) \Rightarrow (W_{n \wedge \tau_\epsilon^{\mathbf{x},\mathrm{Out}}}) \text{ sous-martingale}$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(\tau_\varepsilon^{\mathbf{x},\mathrm{Out}} < +\infty) \leq (x/\varepsilon)^\theta < 1,$$

De plus :

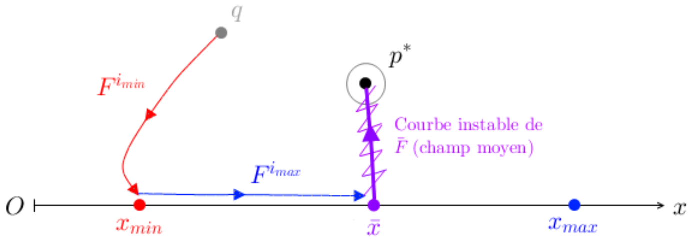
$$(\mathrm{L}_{\mathbf{x}}) \Rightarrow \text{ sur } \{\tau_\varepsilon^{\mathbf{x},\mathrm{Out}} = +\infty\}, \ \limsup_{t \to +\infty} \log(X_{nT})/T \leq -\alpha_{\mathbf{x}}$$
$$\Rightarrow \text{ sur } \{\tau_\varepsilon^{\mathbf{x},\mathrm{Out}} = +\infty\}, \text{ extinction de } \mathbf{x}.$$

Valeurs d'adhérence de (Π_t)

- **Lemme.** $\mathscr{L} :=$ {valeurs d'adhérence de (Π_t)} $\subseteq \mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M})$ p.s.
- On suppose $p \in \Xi$. Soit $\Pi \in \mathscr{L}$. Alors $\Pi \in \mathcal{P}_{inv}(\Xi \times \mathcal{E})$.
- $\Pi = \Pi_0 + \Pi_1$ où $\begin{cases} \Pi_0 = \Pi\big(\cdot \cap \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}\big), \\ \Pi_1 = \Pi\big(\cdot \cap (\Xi \times \mathcal{E}) \setminus \mathbf{M}_0^{\mathbf{y}}\big), \end{cases}$ invariantes.
- $\Pi_t(H_{\mathbf{y}}) = \frac{\log Y_t - \log Y_0}{t} \leq \frac{\log A - \log Y_0}{t} \quad \Rightarrow \quad \Pi(H_{\mathbf{y}}) \leq 0.$
- $H_{\mathbf{y}} =$ « $\mathcal{L}(1/y)$ » $\quad \Rightarrow \quad \Pi_1(H_{\mathbf{y}}) =$ « $\Pi_1 \mathcal{L}(1/y)$ » $= 0.$
- D'où $\Pi_0(H_{\mathbf{y}}) \geq 0$. Or $\Pi_0 \propto \mu_{\mathbf{y}}$ et $\mu_{\mathbf{y}}(H_{\mathbf{y}}) > 0$. Donc $\Pi_0 = 0$.

Unicité de la mesure invariante sur $M \backslash M_0$

- Irréductibilité de $(\tilde{Z}_n)$ $\approx$ liée à l'existence de $p^* \in \Gamma \cap M \backslash M_0$



$\Rightarrow$ $\mathcal{P}_{inv}(\mathbf{M} \backslash \mathbf{M}_0) = \{\Pi\}$, $\Pi_t \to \Pi$.

Alternative

Si $\mathrm{Acc}(p) \cap M_0^{\mathbf{x}}$:

- $\mathbb{P}\big(\sigma_{\mathring{\Gamma}\times\mathcal{E}} < +\infty\big) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Pers}) > 0\,;$
- $\mathbb{P}\big(\sigma_{\mathbf{M}^{\mathbf{x}}_{]0,\varepsilon/2[}} < +\infty\big) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Ext}_{\mathbf{x}}) > 0\,;$
- $\exists c > 0,\ \forall z \in \mathbf{M}^{\mathbf{x}}_{]0,\varepsilon/2[},\quad \mathbb{P}_z\big(\sigma_{\varepsilon}^{\mathbf{x},\mathrm{Out}} < +\infty\big) \leq 1 - c$, d'où :
  - $\mathbb{P}\big(n$ allers-retours entre $\mathbf{M}^{\mathbf{x}}_{]0,\varepsilon/2]}$ et $\mathbf{M}^{\mathbf{x}}_{[\varepsilon,+\infty[}\big) \leq (1-c)^n \to 0$
  - A.p.c.t. : $Z_t \in \mathbf{M}^{\mathbf{x}}_{]0,\varepsilon[}$ (1) ou $Z_t \in \mathbf{M}^{\mathbf{x}}_{[\varepsilon/2,+\infty[}$ (2)
- Cas (1) $\Rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbf{x}}$.
- Cas (2) : $\exists c_1, T_1 > 0,\ \forall z \in \mathbf{M}^{\mathbf{x}}_{[\varepsilon/2,+\infty[},\ \mathbb{P}_z\big(\sigma_{\mathring{\Gamma}\times\mathcal{E}} < T_1\big) \geq c_1$.

$\Rightarrow$ le processus finit par entrer dans $\mathring{\Gamma} \subseteq \Xi$.