L2S4SM
2018

TD1 Rappels sur les espaces vectoriels

I) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car le vecteur nul $(0,0)$ de $\mathbb{R}^2$ n'est pas dans E.

II) (v_1, v_2, v_3, v_4) est une famille de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension trois, donc la famille est liée.

III) 1) * dim E : on échelonne par lignes et on en profite pour caractériser E par un système d'équations linéaires :

$$\begin{array}{cccc} 3 & -1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & y \\ 2 & 0 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 3 & -1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & y \\ 2 & 0 & 1 & z \\ -1 & 1 & 0 & -z+t \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 2 & 0 & x-3z+3t \\ 0 & 2 & 0 & y \\ 0 & 2 & 1 & z \\ -1 & 1 & 0 & -z+t \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & x-y-3z+3t \\ 0 & 2 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -y+z \\ -1 & 0 & 0 & -y/2-z+t \end{array}$$

Après échelonnement, il reste 3 pivots donc dim $E = 3$ et E est caractérisé par l'équation

$$x - y - 3z + 3t = 0$$

III) 1) * dim F : même travail

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 9 & x \\ 1 & 3 & 7 & y \\ -4 & -5 & 0 & z \\ 1 & 2 & 0 & t \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 9 & x-2t \\ 0 & 1 & 7 & y-t \\ 0 & 3 & 0 & z+4t \\ 1 & 2 & 0 & t \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 9 & x-2t \\ 0 & 1 & 7 & y-t \\ 0 & 0 & -21 & -3y+z+7t \\ 1 & 0 & -14 & -2y+3t \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 9 & x-2t \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3}x-3y+z+\left(7-\frac{14}{3}\right)t \\ 1 & 0 & 0 & * \end{matrix}$$

Ainsi, dim F = 3 et F est caractérisé par l'équation

$$7x-9y+3z+7t=0$$

2) * dim$(E\cap F)$: $E\cap F$ est caractérisé par le système

$$\begin{cases} x-y-3z+3t=0 \\ 7x-9y+3z+7t=0 \end{cases}$$

Ces deux équations sont linéairement indépendantes, donc $\dim(E\cap F)=4-2=2$.

* dim E+F : formule de Grassmann :

$$\begin{aligned} \dim(E+F) &= \dim E + \dim F - \dim(E\cap F) \\ &= 3+3-2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

* E et F ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$, car $\dim(E\cap F)=2$, donc $E\cap F\neq\{0\}$.

III.3) * $E \cap F$ est caractérisé par le système (S) :

$$(S)\begin{cases} x - y - 3z + 3t = 0 \\ 7x - 9y + 3z + 7t = 0 \end{cases}$$

On peut l'échelonner :

$$\begin{matrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 7 & -9 & 3 & 7 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 24 & -14 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -12 & 7 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & -15 & 10 \\ 0 & 1 & -12 & 7 \end{matrix}$$

(S) est donc équivalent à

$$\begin{cases} x - 15z + 10t = 0 \\ y - 12z + 7t = 0 \end{cases}$$

Compléter ce système en une famille échelonnée permet de caractériser un supplémentaire de $E \cap F$:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -15 & 10 \\ 0 & 1 & -12 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Ainsi, le système d'équations $\begin{cases} z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$

caractérise un supplémentaire de $E \cap F$ dans $\mathbb{R}^4$.

IV)

* On échelonne le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système

$$(S)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

est équivalent au système

$$(S')\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Ce dernier étant échelonné, $\dim F = 4 - 3 = 1$.

* Base de F : $\dim F = 1$, donc on cherche un vecteur vérifiant le système (S') :

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases}$$

Le vecteur $(0, 1, -2, 1)$ constitue une base de F.

V)

* A est inversible : calculons le déterminant de A.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(-6+4)$$

$$= 2.$$

$\det A \neq 0$, donc A est inversible.

V) * Calcul de l'inverse :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3/2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -3/2 & -2 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

VI) 1) $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$:

* $F \cap G = \{0\}$ car $v = (3, 1, -2)$ ne vérifie pas l'équation caractérisant F.
* $F + G = \mathbb{R}^3$ car

$$\begin{aligned} \dim(F+G) &= \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \\ &= 2 + 1 - 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui a la même dimension que $\mathbb{R}^3$, donc $F + G = \mathbb{R}^3$.

VI) 2) Base de F : choisissons deux vecteurs linéairement indépendant satisfaisant l'équation caractérisant F

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) On pose $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

On a

$$B = P^{-1} A P$$

* Calcul de P^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

* $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 8 & 2 & 12 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

VI) 4) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$

$\det A = \det B$. Prévisible car

$$\begin{aligned} \det B &= \det(P^{-1} A P) \\ &= \det(P^{-1}) \times \det A \times \det P \\ &= (\det P)^{-1} \times \det P \times \det A \\ &= \det A \end{aligned}$$

VII) $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Théorème du rang :

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim E$$

* f surjective $\Leftrightarrow \operatorname{rg} f = \dim F$
$\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim F$
$= 3 - 4$
$= -1$

donc f ne peut pas être surjective.

* f injective $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0$
$\Leftrightarrow \dim E = \operatorname{rg} f$

donc si $\operatorname{rg} f = 2$, f n'est pas injective.