L2 SM
TD2
2018

Réduction des endomorphismes

I) Réponses rapides

1) Si A et A' représentent le même endomorphisme, alors il existe $P \in GL_3(\mathbb{K})$ t.q.

$$\begin{aligned} A &= PA'P^{-1} \\ &= P(2I_3)P^{-1} \\ &= 2PI_3P^{-1} \\ &= 2PP^{-1} \\ &= 2I_3 \end{aligned}$$

Or $A \neq 2I_3$, donc A et A' ne peuvent pas représenter le même endomorphisme.

2) $P_f(X) = P_A(X) = (2-X)(-3-X)(1-X)$

f possède donc trois valeurs propres distinctes. Or $\dim E = 3$, donc f est diagonalisable. Comme $Sp(f) = \{-3, 1, 2\}$, il existe une base B' de E t.q.

$$Mat_{B'} f = A'.$$

3) Non : exemple avec l'endomorphisme représenté par la matrice A de la question 1)

4) Non : la plupart des rotations de $\mathbb{R}^2$ sont inversibles et n'admettent pas de valeur propre.

Exemple : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

I) 5) $P_f(X) = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$

f n'admet que la valeur propre 2, donc si f est diagonalisable, alors $f = 2id$

6) Soient $v \in E \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ t-q.

$$f(v) = \lambda v.$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]_n$

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$$

Donc

$$P(f)(v) = \sum_{k=0}^{n} p_k f^k(v)$$

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, f^k(v) = \lambda^k v$:

* $f^0(v) = id(v) = v = \lambda^0 v$
* Si $f^k(v) = \lambda^k v$, alors

$$\begin{aligned} f^{k+1}(v) &= f(f^k(v)) \\ &= f(\lambda^k v) && [\text{Hyp Rec}] \\ &= \lambda^k f(v) && [f \in \mathcal{L}(E)] \\ &= \lambda^k \lambda v && [v \ \vec{vp} \text{ pour } \lambda] \\ &= \lambda^{k+1} v \end{aligned}$$

* $\forall k \in \mathbb{N}, f^k(v) = \lambda^k v$

Donc

$$P(f)(v) = \sum_{k=0}^{n} p_k \lambda^k v = P(\lambda) v.$$

Conclusion : λ vp de f $\Rightarrow$ $P(\lambda)$ vp de $P(f)$.

7) + D'après le théorème du rang, si $f \in End(\mathbb{R}^4)$ et $rg f = 2$, alors $\dim \ker f = 2$ et 0 est valeur propre de f.

+ Si $rg f = 4$, f n'admet pas forcement de valeur

I] 7) propre. Exemple avec f représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

II] Diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

* Polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 3 & 0 \\ 3 & 1-X & 4 \\ 0 & 4 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= -(X+4)(X-1)(X-6)$$

$\chi_A(X)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

* Sous-espaces propres :

$$E_{-4} = \mathrm{Ker}(A - (-4)I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Avec le pivot :

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 20 \\ 0 & 16 & 20 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Coord. princ. : x, y
Coord. sec. : z

Donc $E_{-4} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$E_1 = \text{Ker}(A - I_3) = \text{Ker}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$= \text{Vect}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$E_6 = \text{Ker}(A - 6I_3) = \text{Ker}\begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

$= \text{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

* Diagonalisation : $A = PDP^{-1}$ où

$P = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -5 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

* Polynôme caractéristique :

$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 2-X & -2 & 1 \\ 2 & -3-X & 2 \\ -1 & 2 & -X \end{vmatrix}$

$= -(X+3)(X-1)^2$

donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si $\dim E_1 = 2$.

II) 2) * Sous espaces propres

$$E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Par le pivot : ($L_2 = 2L_1$ et $L_3 = -L_1$)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Coord princ : x
Coord sec : y, z

Donc

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\dim E_1 = 2$, donc A est diagonalisable

$$E_{-3} = \mathrm{Ker}(A - (-3)I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

* Diagonalisation : $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) $$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* Polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 4-X & 1 & -1 \\ -6 & -1-X & 2 \\ 2 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

II) 3) $\chi_A(X) = -(X-1)^2(X-2)$
donc A est diagonalisable si, et seulement si $\dim E_1 = 2$.

* Sous-espaces propres

$$E_1 = \operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par le pivot. $(L_2 = -2L_1)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Coord prim : y, z
Coord sec. x

Donc $E_1 = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\dim E_1 = 1$, donc A n'est pas diagonalisable.

4) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

* Polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & -4 \\ 0 & -1-X & 6 \\ 0 & -1 & 4-X \end{vmatrix}$$
$$= -(X-1)^2(X-2)$$

donc A est diagonalisable si, et seulement si $\dim E_1 = 2$.

II) 4) * Sous-espaces propres

$$E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dim E_1 = 1$ donc A n'est pas diagonalisable.

5) $$A = \begin{pmatrix} -6 & 10 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

* Polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -6-X & 10 & -4 \\ 0 & -2-X & 0 \\ 4 & 3 & 2-X \end{vmatrix}$$

$$= -(X+2)^3$$

donc A est diagonalisable si, et seulement si $\dim E_{-2} = 3$

Supposons A diagonalisable. Alors il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} = -2I_3$$

Or $A \neq -2I_3$, donc A n'est pas diagonalisable.

II) 6) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

* Polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & 8 \\ 3 & -1-X & 6 \\ -2 & 0 & -5-X \end{vmatrix}$$

$$= -(X+1)^3$$

et le même raisonnement qu'en II) 5) nous permet d'affirmer que A n'est pas diagonalisable.

7) $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 12 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

* Polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -5-X & -3 & -2 \\ 4 & 4-X & 1 \\ 12 & 9 & 4-X \end{vmatrix}$$

$$= -(X-1)^3$$

Même raisonnement qu'en II) 5)

L_2 SM
TD$_2$, 2018

II) 8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

* Polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ -2 & -X & 1 \\ 5 & 1 & -X \end{vmatrix}$$
$$= -(X+1)(X-1)^2$$

A est donc diagonalisable si, et seulement si, $\dim E_1 = 2$

* Sous-espaces propres

$$E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\dim E_1 = 1$, donc A n'est pas diagonalisable

Les diagonalisabilités sur $\mathbb{C}$ se traitent de la même manière.

III) $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $P_A(X) = -X^3 + 2X^2 + X - 2$
$P_A(X) = \det(A - XI_3)$ donc $P_A(0) = \det A = -2$ et A est inversible
D'après le théorème de Cayley-Hamilton,
$P_A(A) = 0$, donc
$$-A^3 + 2A^2 + A - 2I_3 = 0$$
i.e. $-A^3 + 2A^2 + A = 2I_3$
i.e. $A \times (-A^2 + 2A + I_3) = 2I_3$
d'où $A \times \frac{1}{2}(-A^2 + 2A + I_3) = I_3$

III) Il existe donc une matrice $B = \frac{1}{2}\left(-A^2 + 2A + I_3\right)$ telle que $A \times B = I_3$: A est donc inversible et
$$A^{-1} = B = \frac{1}{2}\left(-A^2 + 2A + I_3\right).$$

IV) $$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

1) A est symétrique, donc diagonalisable.

• $$P_A(X) = \begin{vmatrix} m-X & 1 & 1 \\ 1 & m-X & 1 \\ 1 & 1 & m-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m-X+2 & m-X+2 & m-X+2 \\ 1 & m-X & 1 \\ 1 & 1 & m-X \end{vmatrix}$$

$$= (m-X+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m-X & 1 \\ 1 & 1 & m-X \end{vmatrix}$$

$$= (m-X+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-X-1 & 0 \\ 0 & 0 & m-X-1 \end{vmatrix}$$

$$= (-X+m+2)(-X+m-1)^2$$

• $$E_{m-1} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$$

où $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

IV 1) * $E_{m+2} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$E_{m+2} = \operatorname{Ker} v_3$ où $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Finalement, A est diagonalisable. $A = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} m-1 & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$$

2) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(P^{-1}AP) = \operatorname{rg} D$

Si $m = 1$, $\operatorname{rg} D = 1$

Si $m = -2$, $\operatorname{rg} D = 2$

Sinon, $\operatorname{rg} D = 3$

Donc

$$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ 2 & \text{si } m = -2 \\ 3 & \text{si } m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\} \end{cases}$$

3) A est inversible ssi $\operatorname{rg} A = 3$, i.e $m \notin \{-2, 1\}$.

Soit $m \notin \{-2, 1\}$, alors

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} \frac{1}{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m+2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

IV) 3) Calcul de P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et après calculs

$$A^{-1} = \frac{1}{3(m+2)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3(m-1)}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4) $$A^n = P D^n P^{-1}$$

$$= \frac{(m+2)^n}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(m-1)^n}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

L_2 SM
TD_2
2018

V) 1) a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable

$\chi_A(X) = -(X-1)^2(X-2)$

$E_1 = \text{Vect}(v_1)$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $T = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Soit $v_2 \in \mathbb{R}^3$ t.q. $Av_2 = av_1 + v_2$. $(a \neq 0)$
Alors

$$(A - I_3)v_2 = av_1$$

et

$$(A - I_3)^2 v_2 = (A - I_3)av_1 = 0$$

Donc $v_2 \in \text{Ker}(A - I_3)^2$.
Après calcul,

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\text{Ker}(A - I_3)^2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On choisit $v_2 \in \text{Ker}(A - I_3)^2 \setminus \text{Vect}(v_1)$
Par exemple,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $Av_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 + v_2$

donc $a = 1$.

V)1) $E_2 = \mathrm{Ker}\,(A - 2I_3)$

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $E_2 = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Finalement, $A = PTP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable

$P_A(X) = -(X-1)^2(X-2)$

$E_1 = \mathrm{Vect}(v_1)$ où $v_1 = (1, 0, 0)$

Donc

$$T = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$

Soit $v_2 \in \mathbb{R}^3$ non colinéaire à v_1 t.q.

$$A v_2 = a v_1 + v_2.$$

Alors $v_2 \in \mathrm{Ker}\,(A - I_3)^2$

Or

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\mathrm{Ker}\,(A - I_3)^2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

V) 1) b) On choisit donc $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on a alors

$$(A - I_3) v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 v_1$$

donc $a = 2$.

Reste à déterminer $E_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I_3)$:

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $E_2 = \operatorname{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Finalement $A = PTP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} -6 & 10 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable

$$P_A(X) = -(X+2)^3$$

* Sous espace propre $E_{-2} = \operatorname{Ker}(A + 2I_3)$

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

donc $E_{-2} = \operatorname{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

V) 1) c) $\dim E_{-2} = 1$, on écrit donc

$$T = \begin{pmatrix} -2 & a & b \\ 0 & -2 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} , \quad a \neq 0, \ (b,c) \neq 0$$

Soit $v_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus E_{-2}$ t.q. $Av_2 = a v_1 - 2v_2$.
Alors $v_2 \in \operatorname{Ker}(A+2I_3)^2$

$$(A+2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\operatorname{Ker}(A+2I_3)^2 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Choisissons $v_2 = (1,0,0)$. Alors

$$(A+2I_3)v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4v_1$$

et $a = 4$.

Reste à trouver $v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Ker}(A+2I_3)^2$ t.q.
$Av_3 = b v_1 + c v_2 - 2v_3$.
Il suffit de compléter (v_1, v_2) en une base de $\mathbb{R}^3$. Par exemple,

$$v_3 = (0,1,0)$$

On a alors

$$(A+2I_3)v_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3v_1 + 13v_2$$

d'où $b = 3$ et $c = 13$.

V) 1) c) Finalement, $A = PTP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable

$$P_A(X) = -(X+1)^3$$

Sous-espace propre $E_{-1} = \operatorname{Ker}(A + I_3)$.

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $E_{-1} = \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$ avec
$v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (-2, 0, 1)$

On peut donc poser

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

et chercher $v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus E_{-1}$ t.q. $Av_3 = av_1 + bv_2 - v_3$.
Il suffit de compléter (v_1, v_2) en une base de $\mathbb{R}^3$.
Par exemple,

$v_3 = (1, 0, 0)$.

On a alors

$$(A + I_3)v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3v_1 - 2v_2$$

d'où $a = 3$, $b = -2$. Finalement, $A = PTP^{-1}$ avec

V) 1) d) $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 12 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

$P_A(X) = -(X-1)^3$

Sous-espace propre $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$:

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 12 & 9 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $E_1 = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

On aura donc $T = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, $(b,c) \neq 0$

Soit $v_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus E_1$ t.q. $Av_2 = a v_1 + v_2$. Alors $v_2 \in \mathrm{Ker}(A - I_3)^2$:

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & -18 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{Ker}(A - I_3)^2 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a alors $(A - I_3)v_2 = -2v_1$ et $a = -2$

Pour choisir v_3, il suffit de compléter (v_1, v_2)

V)1)e) en une base de $\mathbb{R}^3$. Par exemple, $v_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$. On a alors

$$(A - I_3)v_3 = \begin{pmatrix}-6\\6\\18\end{pmatrix} = -3v_1 + 3v_2.$$

Finalement, $A = PTP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 2\\ -6 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

f) $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable

$$P_A(X) = -(X+1)(X-1)^2.$$

$$E_1 = \text{Ker } v_1 \text{ où } v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

On aura donc

$$T = \begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \quad a \neq 0$$

Soit $v_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus E_1$ t.q. $Av_2 = av_1 + v_2$.
Alors $v_2 \in \text{Ker}(A - I_2)^2$.

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 7 & 2 & -2\\ -7 & -2 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -7 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

donc $\text{Ker}(A - I_3)^2 = (v_1, v_2)$ avec $v_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\7\end{pmatrix}$
et

$$(A - I_3)v_2 = \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} = 3v_1.$$

Reste à déterminer $E_{-1} = \text{Ker}(A + I_3)$.

$$A + I_3 = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

V) 1) f) donc $E_{-1} = \text{Vect}\, v_3$ avec $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finalement, $A = P\,T\,P^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n = (P\,T\,P^{-1})^n = P\,T^n P^{-1}$

où

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule la puissance par blocs :

$$T^n = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} T_1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

où $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

I_2 et N commutent, donc

$$T_1^n = (I_2 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k$$

N est nilpotente : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc

$$T_1^n = I_2 + \binom{n}{1} N = I_2 + nN$$

d'où

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

V) 2) b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}^n = (PTP^{-1})^n = PT^nP^{-1}$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

où $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + N$.

I_2 et N commutent, donc

$$T_1^n = (I_2 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k.$$

N est nilpotente : $N^2 = 0$, donc

$$T_1^n = I_2 + nN$$

donc

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix} -6 & 10 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}^n = PT^nP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$T = -2I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

I_3 et N commutent, donc

$$T^n = (-2I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k} N^k$$

V) 2) c) N est nilpotente : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 52 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$, donc

$$T^n = (-2)^n I_3 + n(-2)^{n-1} N + (-2)^{n-2} \binom{n}{2} N^2$$

pour tout $n \geq 2$.

En utilisant $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{1}{2} n(n-1)$, on a :

$$T^n = (-2)^{n-2} \begin{pmatrix} 4 & -8n & -6n + 26n(n-1) \\ 0 & 4 & -26n \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

pour tout $n \geq 2$.

d) $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}^n = P T^n P^{-1}$$

où $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$T = -I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

I_3 et N commutent, donc

$$T^n = (-I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k$$

N est nilpotente : $N^2 = 0$, donc

$$T^n = (-1)^n I_3 + n(-1)^{n-1} N \quad \forall n \geq 1$$

$$= (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V.1.2)e) $\begin{pmatrix} -5 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 12 & 9 & 4 \end{pmatrix}^n = P T^n P^{-1}$

où $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$T = I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

I_3 et N commutent, donc

$$T^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^{n-k}$$

N est nilpotente : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$

Donc pour tout $n \geq 2$,

$$T^n = I_3 + nN + \binom{n}{2} N^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2n & -3n^2 \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = P T^n P^{-1}$

où $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On calcule la puissance par blocs :

V) 2) f) $T^n = \begin{pmatrix} T_1^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ où $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + N$.

I_2 et N commutent :

$$T_1^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k$$

N est nilpotente. $N^2 = 0$, donc

$$T_1^n = I_2 + nN.$$

D'où

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

VI) 1) N nilpotente, donc $\exists\, k \in \mathbb{N} : N^k = 0$.

Donc

$$(I - N)(I + N + N^2 + \dots + N^{k-1})$$
$$= I - N^k$$
$$= I$$

et $(I - N)^{-1} = I + N + N^2 + \dots + N^{k-1}$

2) On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

de sorte que $A = I - N$ et $N^5 = 0$

On calcule N^2, N^3 et N^4 pour obtenir

$$A^{-1} = I + N + N^2 + N^3 + N^4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$