TD3
L2SM
2018

Systèmes d'équations différentielles linéaires

I) 1) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, S l'ensemble des solutions de $X' = AX + B$ et $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.
On procède par analyse - synthèse.

* <u>Analyse</u> : supposons que S est un sous-espace vectoriel de E. Alors :

• S contient l'élément neutre de E.

$$O_E : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & O_{\mathbb{R}^n} \end{array}.$$

donc $O_E'(t) = AO_E(t) + B(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
donc $O_{\mathbb{R}^n} = B(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ et $B = O_E$
On suppose donc que $B(t) = O_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

• Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $X, Y \in S$, $\alpha X + \beta Y \in S$.
Donc $(\alpha X + \beta Y)' = A(\alpha X + \beta Y) + B$.
On

$$\begin{aligned}
(\alpha X + \beta Y)' &= \alpha X' + \beta Y' && \left[\text{linéarité de } \tfrac{d}{dt}\right] \\
&= \alpha(AX + B) + \beta(AY + B) && [X, Y \in S] \\
&= \alpha AX + \beta AY && [B = O_E] \\
&= A(\alpha X + \beta Y) \\
&= A(\alpha X + \beta Y) + B
\end{aligned}$$

Donc $\alpha X + \beta Y \in S$: pas de condition supplémentaire

* <u>Synthèse</u> : supposons que $B = O_E$. Alors
$O_E \in S$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in S$, $\alpha X + \beta Y \in S$,
donc S est un sous-espace vectoriel de E

<u>Conclusion</u> : S est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si, $B(t) = O_{\mathbb{R}^n}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

I) 2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons e^A nilpotente.
Alors il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $(e^A)^K = 0$. Or
$$(e^A)^K = e^{KA}.$$
donc
$$e^{KA} = 0$$
et
$$e^{KA} \times e^{-KA} = e^0 = 0 \quad [\text{cf I) 3) pour justification}]$$
Absurde car $e^0 = I_n$.
Donc e^A ne peut pas être nilpotente

I) 3) ⚠ On n'a pas toujours
$$e^{A+B} = e^A e^B.$$
Contre-exemple avec
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$
où

EXO
$$\exp A \times \exp B = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1-\theta^2 \end{pmatrix}$$
tandis que
$$\exp(A+B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On a néanmoins la proposition suivante :
Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $AB = BA$, alors
$$\exp(A+B) = \exp A \times \exp B.$$

II) On veut résoudre le système :

$$(S)\begin{cases}(1+x^2)y' = y + (x^3+x)\,e^{-x+\arctan x} & (E)\\ y(1)=3 & (C.I.)\end{cases}$$

* On réécrit (E) : $1+x^2 \neq 0$, donc

$$(E) : \quad y' - \frac{y}{1+x^2} = x\,e^{-x+\arctan x}$$

* On résout l'équation homogène

$$(EH) : \quad y' - \frac{y}{1+x^2} = 0$$

En utilisant un facteur intégrant,

$$y'e^{-\arctan x} + y\left(e^{-\arctan x}\right)' = 0$$

Ainsi,

$$y\,e^{-\arctan x} = C \quad \text{et} \quad y(x) = C\,e^{\arctan x}.$$

* On fait varier la constante.

$$y(x) = C(x)\,e^{\arctan x}$$

Alors

$$y'(x) = \frac{y(x)}{1+x^2} + C'(x)\,e^{\arctan x}$$

et si y est solution de (E), alors

$$C'(x)\,e^{\arctan x} = x\,e^{-x+\arctan x}$$

donc

$$C'(x) = x\,e^{-x}$$

d'où

II)

$$C(x) - C(0) = \int_0^x u e^{-u}\,du$$

$$= 1 - e^{-x}(1+x) \qquad [IPP]$$

* Les solutions de (E) sont de la forme :

$$y(x) = \left[C + 1 - (1+x)e^{-x}\right] e^{\arctan x}$$

où $C \in \mathbb{R}$.

* On résout (S) :

$$y(1) = \left(C + 1 - 2e\right) e^{\pi/4}$$

Donc

$$y(1) = 3 \iff (C + 1 - 2e)e^{\pi/4} = 3$$

$$\iff C = 3e^{-\pi/4} + 2e - 1$$

et la solution de (S) est

$$y(x) = \left(3e^{-\pi/4} + 2e - (1+x)e^{-x}\right) e^{\arctan x} .$$

TD 3
L_2 SM S_4
2018

III) 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

On écrit $A = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ où $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $e^A = \begin{pmatrix} e^T & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$.

$T^2 = 0$ donc $e^T = I_2 + T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $e^A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} -6 & 10 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

On réduit la matrice A :

$P_A(X) = \det(A - XI_3) = -(X+2)^3$

$E_{-2} = \operatorname{Ker}(A + 2I_3)$

$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

donc $E_{-2} = \operatorname{Vect} v_1$ où $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Ker}(A+2I_3)^2 = \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$

$(A+2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\operatorname{Ker}(A+2I_3)^2 = \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

III) 2) On trouve v_3 en complétant (v_1, v_2) en une base de $\mathbb{R}^3$. Par exemple, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a alors

$$(A + 2I_3)v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4v_1$$

$$(A + 2I_3)v_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -10v_1 + 13v_2$$

Donc $A = PTP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -10 \\ 0 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc $e^A = Pe^T P^{-1}$

On $T = -2I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

I_3 et N commutent, donc

$$e^T = e^{-2} \times e^N$$

On

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 52 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0, \text{ donc}$$

$$e^N = I_3 + N + \frac{1}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$e^T = e^{-2}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$e^A = Pe^T P^{-1} = e^{-2}\begin{pmatrix} -3 & -16 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 29 & 5 \end{pmatrix}.$$

IV) 0) Solution générale de

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 4z \\ z' = y \end{cases}$$

On écrit

$$X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

On veut résoudre

$$X' = AX$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* Méthode générale : changement de base via une matrice de passage P indépendante de $t \in \mathbb{R}$: on pose

$$Y(t) = P^{-1} X(t)$$

d'où $X(t) = P\, Y(t)$

et on doit résoudre

$$P\, Y'(t) = A P\, Y(t)$$

i.e.

$$Y'(t) = P^{-1} A P\, Y(t)$$

On cherche donc à réduire (diagonaliser, trigonaliser) la matrice A.

* Réduction de A :

$$P_A(X) = -(X+2)(X-2)^2$$

$$E_2 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \text{ où } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

IV) 0) $E_{-2} = \text{Vect}\, v_3$ où $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ainsi, $A = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

* Retour aux solutions : $Y' = P^{-1} A P Y$, donc

$$Y'(t) = D\, Y(t)$$

d'où

$$Y(t) = e^{tD} Y_0 \quad \text{où} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ constant}$$

et comme $X = PY$,

$$X(t) = P e^{tD} Y_0$$
$$= \alpha_1 e^{2t} v_1 + \alpha_2 e^{2t} v_2 + \alpha_3 e^{-2t} v_3$$

i.e.

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_1 e^{2t} + \alpha_3 e^{-2t} \\ y(t) = 2\alpha_2 e^{2t} + 2\alpha_3 e^{-2t} \\ z(t) = \alpha_2 e^{2t} - \alpha_3 e^{-2t} \end{cases}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

2) $$\begin{cases} x' = 3x + 8z \\ y' = 3x - y + 6z \\ z' = -2x - 5z \end{cases}$$

On écrit ce système sous forme matricielle. On pose $X = (x, y, z)$ et on cherche à résoudre

$$X'(t) = A\, X(t)$$

où

IV] 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

On réduit la matrice A :

$P_A(X) = (X+1)^3$: A est trigonalisable.

$E_{-1} = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Avec $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $A v_3 = 6 v_1 + 2 v_2 - v_3$

Donc $A = PTP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose

$$Y(t) = P^{-1} X(t)$$

de sorte que

$$Y'(t) = T\, Y(t)$$

et donc

$$Y(t) = e^{tT} Y_0 \quad \text{où} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \text{(constant)}$$

Calculons e^{tT} : $T = -I_3 + N$ où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est nilpotente : } N^2 = 0$$

I_3 et N commutent, donc

$$\begin{aligned} \exp(tT) &= \exp(t(-I_3+N)) = \exp(-tI_3 + tN) \\ &= \exp(-tI_3)\exp(tN) = e^{-t} e^{tN} \\ &= e^{-t}(I_3 + tN) \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6t \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

IV) 2) Ainsi,

$$Y(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6t \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

et comme $X = PY$,

$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6t \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$= e^{-t} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8t \\ 1 & 3 & 12t \\ 0 & -2 & 1-4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}(4\alpha_2 + 8\alpha_3 t) \\ y(t) = e^{-t}(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 12\alpha_3 t) \\ z(t) = e^{-t}(-2\alpha_2 + \alpha_3 - 4\alpha_3 t) \end{cases}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

IV) 1)

$$\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = 5x + y \\ z' = 5x - 5y - 4z \end{cases}$$

On pose $X = (x, y, z)$ et on cherche à résoudre

$$X'(t) = AX(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

On réduit la matrice A :

$$P_A(X) = (X+4)(X-(1-5i))(X-(1+5i))$$

A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. $A = PDP^{-1}$ où (après calculs)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1+5i & 0 & 0 \\ 0 & 1-5i & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

On veut donc résoudre

$$X' = PDP^{-1}X$$

i.e.

$$P^{-1}X' = DP^{-1}X$$

On pose $Y = P^{-1}X$ et on résout

$$Y' = DY.$$

Les solutions complexes sont de la forme

$$Y(t) = \exp(tD)\,Y_0 \quad \text{où } Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}$$

et comme $Y = P^{-1}X$,

$$X(t) = P\exp(tD)\,Y_0$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{5it} + \alpha_2 e^{-5it} \\ -i(\alpha_1 e^{5it} - \alpha_2 e^{-5it}) \\ \alpha_1 e^{5it} + \alpha_2 e^{-5it} + \alpha_3 e^{-5t} \end{pmatrix}$$

Problème : on veut des solutions réelles

$\leadsto$ Pour trouver trois solutions réelles linéairement indépendantes, on choisit les solutions correspondant à :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \beta_3 \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1/2, \quad \beta_1 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{i\beta_2}{2}, \quad \beta_2 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_3 = 0$$

et on se souvient des formule : $(\theta \in \mathbb{R})$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$
$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

Finalement, les solutions réelles du système sont de la forme

$$\begin{cases} x(t) = e^{t}\left(\beta_1 \cos(5t) - \beta_2 \sin(5t)\right) \\ y(t) = e^{t}\left(\beta_1 \sin(5t) + \beta_2 \cos(5t)\right) \\ z(t) = e^{-4t} + e^{t}\left(\beta_1 \cos(5t) - \beta_2 \sin(5t)\right) \end{cases}$$

où $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$.

V] $(E) \quad y^{(3)} - 3y'' - y' + 3y = 0$

(équation plus simple que dans la feuille de TD.)

1) $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$t \longmapsto (y(t), y'(t), y''(t))$

Alors $X'(t) = (y'(t), y''(t), y^{(3)}(t))$

et

y solution de $(E) \iff \begin{cases} y' = y' \\ y'' = y'' \\ y^{(3)} = -3y + y' + 3y'' \end{cases}$

$$\iff \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$$\iff X' = AX \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

V 2) On cherche donc à résoudre le système $X' = AX$.
Après réduction de la matrice A, on obtient
$A = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Le système équivaut donc à

$$X' = PDP^{-1}X$$

i.e.

$$P^{-1}X' = DP^{-1}X.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, cela revient à

$$Y' = DY \qquad \text{(car } P \text{ est constante)}$$

Les solutions sont de la forme

$$Y(t) = \exp(tD)\, Y_0 \qquad \text{où } Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$$

et

$$X(t) = P\exp(tD)\, Y_0$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{t} + \alpha_3 e^{3t} \\ -\alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{t} + 3\alpha_3 e^{3t} \\ \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{t} + 9\alpha_3 e^{3t} \end{pmatrix}$$

Finalement, les solutions de (E) sont de la forme

$$y(t) = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{t} + \alpha_3 e^{3t}$$

VI) bis) $y^{(3)} - 3y'' + y' - 3y = 0$ (E)

On pose $X(t) = (y(t), y'(t), y''(t))$. Alors y est solution de (E) si et seulement si X est solution de

$$X' = AX$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Après réduction, $A = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ i & -i & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On note $v_1 = (-1, i, 1)$ et $v_2 = \overline{v_1} = (-1, -i, 1)$.

On pose

$$u = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$
$$v = \frac{i}{2}(v_1 - v_2)$$

de sorte que

$$Au = \frac{1}{2}(Av_1 + Av_2) = \frac{1}{2}(-iv_1 + iv_2) = -v$$
$$Av = \frac{i}{2}(Av_1 - Av_2) = \frac{i}{2}(-iv_1 - iv_2) = u$$

Ainsi, on peut écrire $A = QBQ^{-1}$ où

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On pose $Y = Q^{-1}X$ et on veut résoudre

$$Y'(t) = BY(t).$$

Les solutions sont de la forme

$$Y(t) = \exp(tB)\, Y_0$$

où $Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}$.

Pour calculer $\exp(tB)$, on écrit

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on veut calculer $\exp(tB_1)$. On remarque que

$$B_1^2 = -I_2$$

d'où

$$\exp(tB_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_1^n$$

$$= \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} B_1^{2k} + \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} B_1^{2k+1}$$

$$= \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} (-1)^k I_2 + \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k B_1$$

$$= \cos t \, I_2 + \sin t \, B_1$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t \\ -\alpha_1 \sin t + \alpha_2 \cos t \\ \alpha_3 e^{3t} \end{pmatrix}$$

et

$$X(t) = QY(t) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \cos t - \alpha_2 \sin t + \alpha_3 e^{3t} \\ \alpha_1 \sin t - \alpha_2 \cos t + 3\alpha_3 e^{3t} \\ \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t + 9\alpha_3 e^{3t} \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$y(t) = -\alpha_1 \cos t - \alpha_2 \sin t + \alpha_3 e^{3t}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Remarque: Cette méthode fonctionne aussi pour l'exercice IV) 1)

VI)
$$\begin{cases} x'(t) = tx + y \\ y'(t) = x + ty \end{cases}$$

On écrit $X(t) = (x(t), y(t))$ et on cherche à résoudre

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

où $A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$

Remarque On n'a pas $X(t) = \exp(tA(t))X_0$ car la matrice A dépend de t.

Néanmoins, on peut diagonaliser A $A = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & t+1 \end{pmatrix}$$

On remarque que P ne dépend pas de t ! On peut donc poser $Y(t) = P^{-1}X(t)$ de sorte que $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$. On cherche donc à résoudre

$$Y'(t) = D(t)Y(t)$$

Comme $D(t)$ est diagonale,

VI)
$$\exp\left(\int D(t)\,dt\right)' = D(t)\exp\left(\int D(t)\,dt\right)$$

où $\int D(t)\,dt$ est une primitive de $D(t)$. Et donc
$Y(t) = \exp\left(\int D(t)\,dt\right) X_0$

où $Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Une primitive de $D(t)$ est donnée par
$$\int D(t)\,dt = \begin{pmatrix} t^2/2 - t & 0 \\ 0 & t^2/2 + t \end{pmatrix}$$

d'où
$$Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 (t-1) e^{t^2/2 - t} \\ \alpha_2 (t+1) e^{t^2/2 + t} \end{pmatrix}$$

et
$$X(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 (t-1) e^{t^2/2 - t} + \alpha_2 (t+1) e^{t^2/2 + t} \\ \alpha_1 (1-t) e^{t^2/2 - t} + \alpha_2 (t+1) e^{t^2/2 + t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$