

Feuille 3: systèmes d'équations différentielles linéaires

1. Quelques questions dont la réponse est immédiate.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. À quelle condition l'ensemble des solutions de $X' = AX + B$ est-il un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$?
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. L'exponentielle de A peut-elle être nilpotente?
3. A-t-on toujours, si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$?

2. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle

$$(1 + x^2)y' = y + (x^3 + x)e^{-x+\arctan(x)}.$$

Trouver l'unique solution telle que $y(1) = 3$.

3. Calculer $\exp(A)$ lorsque A est successivement égale aux matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -6 & 10 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Quelle est la solution générale des systèmes différentielles suivants:

1. $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = 5x + y \\ z' = 5x - 5y - 4z \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = 3x + 8z \\ y' = 3x - y + 6z \\ z' = -2x - 5z \end{cases}$

5. On considère l'équation différentielle

$$y^{(3)} - 3y'' + y' - 3y = 0. \tag{E}$$

1. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = (y(t), y'(t), y''(t))$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si X est solution d'un système différentiel $X' = AX$ où A est une matrice que l'on déterminera.
2. En déduire toutes les solutions de (E).

6. Trouver toutes les solutions de

$$\begin{cases} x'(t) = tx + y \\ y'(t) = x + ty. \end{cases}$$