

Contrôle du 29 septembre 2017 Durée : 40 minutes
Les documents et les calculatrices scientifiques ne sont pas autorisés.

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Calculer lorsque c'est possible les produits MN , BC et CB .

Réponses : $MN = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, $CB = (1 + \alpha)$.

2. Calculer lorsque c'est possible les déterminants de M , N , B , C .

Réponses : $\det M = -1$, $\det N = 0$. On ne peut calculer le déterminant de B ou de C , car ces matrices ne sont pas carrées.

3. Les matrices M , N , B , C sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

Réponses : $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les autres matrices ne sont pas inversibles (N n'est pas inversible car $\det N = 0$; B et C ne sont pas carrées et donc pas inversibles).

4. Résoudre en $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ l'équation $MX = B$ pour la valeur particulière $\alpha = 2$.

Réponses : $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Résoudre en $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ l'équation $NX = B$ suivant les valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Réponses : Si $\alpha \neq 1$, il n'y a aucune solution. Si $\alpha = 1$, il y a une infinité de solutions.

Par exemple, $X = \begin{pmatrix} 1 - z \\ 1 - 2z \\ z \end{pmatrix}$ avec z arbitraire.

6. Calculer les normes, le produit scalaire et le produit vectoriel des vecteurs $\vec{b} = \vec{i} + \alpha\vec{k}$ et $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ correspondant aux matrices B et tC . Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont-ils orthogonaux ? Compléter dans ce(s) cas $\vec{b}$ et $\vec{c}$ en une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Réponses : $\|\vec{b}\| = \sqrt{1 + \alpha^2}$, $\|\vec{c}\| = \sqrt{3}$, $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 1 + \alpha$, $\vec{b} \times \vec{c} = -\alpha\vec{i} + (\alpha - 1)\vec{j} + \vec{k}$. Les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont orthogonaux si et seulement si $\alpha = -1$. Dans ce cas, une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ est constituée des vecteurs $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.