

Nom :

Prénom :

Groupe :

Contrôle du 18 novembre 2016. Durée totale de l'épreuve : 40 minutes

Les documents et les calculatrices scientifiques ne sont pas autorisés.

1. On note $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de R^3 . On considère le plan P d'équation $4x - y + 2z = 0$.

(a) Pour quel $t \in \mathbb{R}$ le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + t\vec{j} - \vec{k}$ appartient-il à P ? Dans la suite, on notera $\vec{u}$ le vecteur correspondant à ce t .

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{bmatrix}$$

Les coordonnées de $\vec{u}$ sont $x=1, y=t, z=-1$, $\vec{u}$ appartient à P ssi
 $4 \cdot 1 - t + 2 \cdot (-1) = 0 \iff t = 2$. Alors $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) Donner un vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal au plan P .

L'équation du plan P peut être écrite $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rangle = 0$. Le vecteur $\vec{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ est orthogonal à P .

(c) Compléter $\vec{u}$ en une base orthogonale du plan P et puis en déduire une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de P .

Le vecteur $\vec{n} \wedge \vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$ et à $\vec{u}$. Comme il est orthogonal à $\vec{n}$, il appartient à P . La famille $(\vec{u}, \vec{n} \wedge \vec{u})$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls de P . C'est donc une base orthogonale de P . On obtient une base orthonormée en normalisant les vecteurs :

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{n} \wedge \vec{u}}{\|\vec{n} \wedge \vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{car } \vec{n} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(d) Compléter $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de R^3 .

Par construction, $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. De plus la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n})$ est directe. On a donc $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(e) Décomposer le vecteur $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ dans cette base.

Dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on a
 $\vec{a} = \langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{a}, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 + \langle \vec{a}, \vec{e}_3 \rangle \vec{e}_3$. Ici
 $a_1 = \langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} 2, \quad a_2 = \langle \vec{a}, \vec{e}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{14}} 4, \quad a_3 = \langle \vec{a}, \vec{e}_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{21}} 5$

(f) Calculer le cosinus de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{a}$.

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{u}\|} = \frac{2}{\sqrt{3} \sqrt{6}}$$

2. On considère les applications linéaires

$$f(u, v) = (u - v, 2u + v, u + 2v) \quad \text{et} \quad g(x, y, z) = (x + y, x - y + z).$$

(a) Préciser les espaces de départ et d'arrivée de f et de g .

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) \longmapsto (u - v, 2u + v, u + 2v) & (x, y, z) \longmapsto (x + y, x - y + z) \end{array}$$

(b) Donner les matrices M_f et M_g associées à f et g dans les bases canoniques.

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad M_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Montrer que l'image de f est un plan vectoriel et en donner une équation cartésienne.

$\text{Im} f$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Comme ces vecteurs ne sont pas colinéaires, c'est un plan vectoriel. Pour avoir son équation cartésienne, on calcule un vecteur orthogonal non nul. On prend donc $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. L'équation du plan est $x - y + z = 0$.

(d) Montrer que le noyau de g est une droite vectorielle et en donner un vecteur directeur.

Par définition, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \text{Ker } M_g$ ssi $M_g \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Cela donne $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x + y = -2x \end{cases}$
ou encore $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ -2x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Donc $\text{Ker } g$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(e) Calculer la matrice $M_{g \circ f}$ de $g \circ f$ en faisant un produit de matrices.

$$M_{g \circ f} = M_g M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$