

Nom :

Prénom :

Groupe :

Contrôle du 17 novembre 2017. Durée totale de l'épreuve : 40 minutes

Les documents et les calculatrices scientifiques ne sont pas autorisés.

1. On note $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(a) Donner l'équation cartésienne du plan vectoriel P orthogonal au vecteur $\vec{n} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

$$x - 2y + 2z = 0.$$

(b) Déterminer $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = 2\vec{i} + 2t\vec{j} + t\vec{k}$ appartienne à P . Cela fixe $\vec{u}$ pour la suite.

$\vec{u} = (2; 2t; t)$ appartient à P si et seulement si $2 - 2 \cdot 2t + 2 \cdot t = 0$ ou encore $2 - 2t = 0$ d'où $t = 1$. (On obtient donc $\vec{u} = (2; 2; 1)$.)

(c) Compléter $\vec{u}$ en une base orthogonale du plan P et puis en déduire une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de P .

Le produit vectoriel $\vec{v} = \vec{n} \wedge \vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$ (donc $\vec{v} \in P$) et à $\vec{u}$ (donc $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base orthogonale de P). On calcule $\vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-6; 3; 6)$. Avec $\|\vec{u}\| = \sqrt{9} = 3$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{81} = 9$ on obtient $\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{3}(2; 2; 1)$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{9}(-6; 3; 6)$.

(d) Compléter $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Il suffit de poser $\vec{e}_3 = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3}(1; -2; 2)$.

(e) Décomposer le vecteur $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$ dans cette base.

La décomposition est $\vec{a} = \langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{a}, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 + \langle \vec{a}, \vec{e}_3 \rangle \vec{e}_3$ où $\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle = \frac{1}{3} \langle (1; 0; -1), (2; 2; 1) \rangle = \frac{1}{3}$ et de même $\langle \vec{a}, \vec{e}_2 \rangle = -\frac{4}{3}$ et $\langle \vec{a}, \vec{e}_3 \rangle = -\frac{1}{3}$, en résumé $\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{4}{3}\vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_3$. (Remarque: on vérifie facilement qu'on a vraiment $\frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{4}{3}\vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_3 = (1; 0; -1)$.)

(f) Calculer le cosinus de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{a}$.

$$\cos(\angle \vec{u}, \vec{a}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

2. On considère les applications linéaires

$$f(x, y, z) = (x - y, x - y + z) \quad \text{et} \quad g(u, v) = (u + v, 2u - v, u + 2v).$$

(a) Préciser les espaces de départ et d'arrivée de f et de g .

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

(b) Donner les matrices M_f et M_g associées à f et g dans les bases canoniques.

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ g(\vec{i}) & g(\vec{j}) \end{matrix}$

(c) Résoudre l'équation $f(x, y, z) = (0; 0)$ en l'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

On résout le système d'équations linéaires $\begin{cases} L_1 & x - y = 0 \\ L_2 & x - y + z = 0 \end{cases}$
 avec la méthode de Gauss: $\begin{cases} L_1 & x - y = 0 \\ L_2 - L_1 & z = 0 \end{cases}$ ce qui donne $z = 0$ et $x = y$
 où y est un paramètre (inconnues secondaire) d'où l'ensemble de solutions $S = \{(y, y, 0) \in \mathbb{R}^3; y \in \mathbb{R}\}$ (= droite vectorielle de vecteur directeur $(1; 1; 0)$).

(d) Montrer que le produit de matrices $M_g M_f$ est bien défini. Le calculer. En déduire l'expression de l'application composée $g \circ f$.

M_g a 3 colonnes, M_f a 2 lignes donc le produit $M_g M_f$ est bien défini.
 On a $M_g M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad (\in \mathcal{M}_{3,3}).$
 On en déduit, puisque $M_{g \circ f} = M_g M_f$ que
 $g \circ f(x, y, z) = (2x - 2y + z; x - y - z; 3x - 3y + 2z).$