

Nom :

Prénom :

Groupe :

Contrôle du 2 décembre 2016. Durée totale de l'épreuve : 40 minutes

Les documents et les calculatrices scientifiques ne sont pas autorisés.

1. On considère la fonction F définie dans $\mathbb{R}^2$ par $F(x, y) = \ln(4x^2 + 4y^2 + 2)$.

(a) Préciser le domaine de définition.

Le domaine de définition de F est $\mathcal{D}(F) = \mathbb{R}^2$.

(b) Calculer les dérivées partielles premières de cette fonction.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{8x}{4x^2 + 4y^2 + 2} = \frac{4x}{2x^2 + 2y^2 + 1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{8y}{4x^2 + 4y^2 + 2} = \frac{4y}{2x^2 + 2y^2 + 1}$$

(c) Déterminer les courbes de niveau pour 0, $\ln 2$ et $\ln 5$.

Pour $c \in \mathbb{R}$ on a $F(x, y) = c$ si et seulement si $4x^2 + 4y^2 + 2 = e^c$ ou encore si et seulement si $x^2 + y^2 = \frac{e^c - 2}{4}$.

Si $c = 0$ alors $x^2 + y^2 = -1/2$ ce qui n'est pas possible (car $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$ pour tous réels x et y). Donc F n'a pas de courbe de niveau 0.

Si $c = \ln 2$ alors $x^2 + y^2 = 0$ donc $x = y = 0$. Donc la courbe de niveau $\ln 2$ est réduite au seul point $(0; 0)$.

Si $c = \ln 5$ alors $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ ce qui représente un cercle centré en $(0; 0)$ de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(d) On rappelle la définition de la dérivée directionnelle : $\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(x, y) = D_{\vec{v}}F(x, y) = \langle \vec{\text{grad}}F(x, y), \vec{v} \rangle$.
Calculer la dérivée directionnelle $\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}$ de F au point $(0, y_0)$ suivant le vecteur $\vec{v} = (2, 0)$.

D'après la question 1b) on a $\vec{\text{grad}}F(0, y_0) = (0; \frac{4y_0}{2y_0^2 + 1})$.

Donc $D_{\vec{v}}F(2; 0) = \langle (0; \frac{4y_0}{2y_0^2 + 1}), (2; 0) \rangle = 0 \cdot 2 + \frac{4y_0}{2y_0^2 + 1} \cdot 0 = 0$.

(e) Donner les points critiques de la fonction F .

D'après la question 1b) on a $\vec{\text{grad}}F(x, y) = (0; 0)$ si et seulement si $(\frac{4x}{2x^2 + 2y^2 + 1}, \frac{4y}{2x^2 + 2y^2 + 1}) = (0; 0)$ ce qui revient à $x = 0$ et $y = 0$. F admet donc $(0; 0)$ pour seul point critique.

(f) S'agit-il de minima ? maxima ? (Il n'est pas nécessaire de calculer les dérivées partielles secondes pour cette question.)

Pour tous réels x et y on a $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$ donc $4x^2 + 4y^2 + 2 \geq 2$ puis $F(x, y) \geq \ln 2 = F(0; 0)$ ce qui veut dire que F a un minimum global en $(0; 0)$ (qui vaut $\ln 2$).

(Remarque : On voit facilement que F est de classe C^1 sur son domaine de définition (car F est la composée d'un polynôme et du $\ln$) donc un extremum de F est nécessairement un point critique et comme il n'y a qu'un seul point critique F n'a pas d'autres extrema qu'en $(0; 0)$.)

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x^2 + xy^2 - x$.

(a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}(f)$ de f .

Le domaine de définition de f est $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$.

La fonction f est-elle de classe C^1 , de classe C^2 sur $\mathcal{D}(f)$? (Justifier succinctement.)

La fonction f est de classe C^1 et de classe C^2 (d'ailleurs de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$) car f est un polynôme.

(b) Calculer le gradient de f en un point (x, y) .

$\vec{\text{grad}} f(x, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)) = (2x + y^2 - 1, 2xy)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Calculer les points critiques de f .

La condition $\vec{\text{grad}} f(x, y) = (0; 0)$ donne le système $\begin{cases} 2x + y^2 = 1 \\ 2xy = 0 \end{cases}$ (en les inconnues x et y).

Si $x = 0$ alors l'équation $2xy = 0$ est satisfaite et $2x + y^2 = 1$ devient $y^2 = 1$ ou encore $y = \pm 1$.

Si $x \neq 0$ alors $y = 0$ (car $2xy = 0$) et $2x + y^2 = 1$ devient $2x = 1$ donc $x = \frac{1}{2}$.

On obtient donc trois points critique de f : $(0; 1)$, $(0; -1)$ et $(\frac{1}{2}; 0)$.

(d) Déterminer la nature des points critiques (minimum local, maximum local, point selle)

La matrice Hessienne de f est $\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$.

En $(\frac{1}{2}; 0)$ on a $\mathcal{H}(\frac{1}{2}; 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $2 \cdot 1 - (0 \cdot 0) = 2 > 0$ et comme

$2 (= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2})$ est > 0 , f a un minimum local en $(\frac{1}{2}; 0)$.

En $(0; \pm 1)$ on a $\mathcal{H}(0; \pm 1) = \begin{pmatrix} 2 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $-4 < 0$ donc f a un point selle en $(0; 1)$ et en $(0; -1)$.

3. Calculer la matrice jacobienne de la fonction $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$\vec{g}(x, y, z) = (xyz, 3ze^{x^2})$.

$\mathcal{J}_{\vec{g}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 6xze^{x^2} & 0 & 3e^{x^2} \end{pmatrix}$.