UNIVERSITÉ D'ORLÉANS
Licence PCSI, SOL1MT01

MATHÉMATIQUES, PHYSIQUE, CHIMIE
Premier semestre, année 2017/2018

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Contrôle du 1 décembre 2017. Durée totale de l'épreuve : 40 minutes
Les documents et les calculatrices scientifiques ne sont pas autorisés.

1. On considère la fonction $z = f(x, y) = \ln(1 + x^2 - y^2)$.

(a) Préciser son domaine de définition $\mathcal{D}(f)$. La fonction f est-elle de classe C^1, de classe C^2 sur $\mathcal{D}(f)$ (on ne demande pas de calcul) ?

$\ln(u)$ est défini si et seulement si $u > 0$
Donc $\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1+x^2-y^2 > 0\}$
f est la composition de $(x,y) \mapsto u = 1+x^2-y^2$ qui est C^∞ (car polynomiale) et de $u \mapsto \ln(u)$ qui est C^∞.
La composée de fonctions C^∞ est C^∞.

(b) Calculer les dérivées partielles premières de cette fonction.

on pose $u = 1+x^2-y^2$

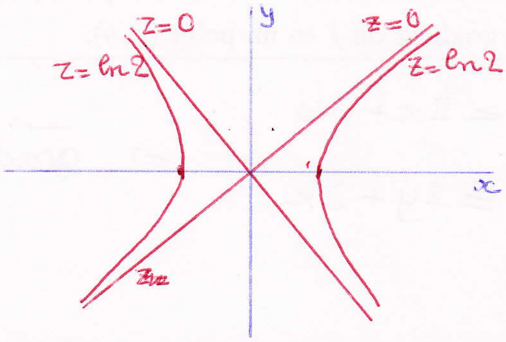
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d(\ln u)}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2-y^2}\,2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+x^2-y^2}(-2y)$$

(c) Donner l'équation des courbes de niveau pour $z = 0$ et $z = \ln 2$ et les tracer.

$\ln(1+x^2-y^2) = 0 \iff 1+x^2-y^2 = 1 \iff x^2-y^2 = 0$
$\iff (x-y)(x+y) = 0 \iff \begin{cases} y = x \\ \text{ou} \\ y = -x \end{cases}$ réunion de deux droites

$\ln(1+x^2-y^2) = \ln 2 \iff 1+x^2-y^2 = 2 \iff x^2-y^2 = 1$
C'est l'équation d'une hyperbole équilatère d'asymptotes $y = \pm x$



TSVP

(d) On rappelle la définition de la dérivée directionnelle dans la direction $\vec{v}$ au point (x, y) :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y) = D_{\vec{v}} f(x, y) = \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x, y), \vec{v} \rangle$$

Comment choisir le vecteur $\vec{v}$ de norme 1 pour que la dérivée directionnelle dans la direction $\vec{v}$ au point $(1, 0)$ soit la plus grande possible ?

$D_{\vec{v}} f(x,y)$ est maximal quand $\vec{v}$ pointe dans la direction de $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x,y)$, c.a.d $\vec{v} = \frac{1}{\|\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x,y)\|} \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x,y)$

Ici : $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) Donner les points critiques de la fonction f.

On résout le système

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ c.a.d $\begin{cases} \frac{2x}{1+x^2-y^2} = 0 \\ \frac{-2y}{1+x^2-y^2} = 0 \end{cases}$.

Il admet $(0,0)$ comme unique solution

(f) S'agit-il de minima ? maxima ? (Il n'est pas nécessaire de calculer les dérivées partielles secondes pour cette question.)

$f(0,0) = \ln 1 = 0$

comme $1+x^2-y^2$ prend des valeurs >1 et <1 dans tout voisinage de $(0,0)$, $f(x,y)$ prend des valeurs >0 et <0 dans tout voisinage de $(0,0)$. Le point critique $(0,0)$ n'est donc ni un maximum ni un minimum local.

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$.

(a) Calculer le gradient de f en un point (x, y).

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 3x$

$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 2y+3x \end{pmatrix}$

Nom :

(b) Calculer les points critiques de f.

On résout le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{c.a.d} \quad \begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$$

. C'est un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues. Il est de Cramer : $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$

Il admet donc $(0,0)$ pour unique solution.

(c) Déterminer la nature des points critiques (minimum local, maximum local, point selle).

On calcule la matrice hessienne.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3$$

$$\Rightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Son déterminant est strictement négatif. Donc $(0,0)$ est un point-selle.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(a) Calculer la matrice jacobienne de f en tout point (r,θ).

On pose $f_1(r,\theta) = r\cos\theta$, $f_2(r,\theta) = r\sin\theta$.

$$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

(b) En quels points (r,θ) la matrice jacobienne est-elle inversible ?

$J_f(r,\theta)$ est inversible ssi son déterminant est non nul

$\det J_f(r,\theta) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$

Donc $J_f(r,\theta)$ est inversible ssi $r \neq 0$

TSVP

(c) (*question facultative*) On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Donner une approximation de la variation $(\Delta x, \Delta y)$ de (x, y) correspondant à la variation $(\Delta r = 0.1, \Delta\theta = 0.1)$ de (r, θ) autour de $(r, \theta) = (1, \pi/4)$.

$$\begin{pmatrix}\Delta r\\ \Delta\theta\end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{J_f(r,\theta)} \longrightarrow \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} \quad \text{c.a.d} \quad \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} \approx J_f(r,\theta)\begin{pmatrix}\Delta r\\ \Delta\theta\end{pmatrix}$$

Pour $r=1$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta r\\ \Delta\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.1\\ 0.1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\times 0.1\end{pmatrix}$$