

Nom :

Prénom :

Groupe :

Contrôle du 1 décembre 2017. Durée totale de l'épreuve : 40 minutes

Les documents et les calculatrices scientifiques ne sont pas autorisés.

1. On considère la fonction $z = f(x, y) = \ln(1 + x^2 - y^2)$.

- (a) Préciser son domaine de définition $\mathcal{D}(f)$. La fonction f est-elle de classe C^1 , de classe C^2 sur $\mathcal{D}(f)$ (on ne demande pas de calcul) ?

- (b) Calculer les dérivées partielles premières de cette fonction.

- (c) Donner l'équation des courbes de niveau pour $z = 0$ et $z = \ln 2$ et les tracer.

- (d) On rappelle la définition de la dérivée directionnelle dans la direction $\vec{v}$ au point (x, y) :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y) = D_{\vec{v}}f(x, y) = \langle \vec{\text{grad}}f(x, y), \vec{v} \rangle$$

Comment choisir le vecteur $\vec{v}$ de norme 1 pour que la dérivée directionnelle dans la direction $\vec{v}$ au point $(1, 0)$ soit la plus grande possible ?

- (e) Donner les points critiques de la fonction f .

- (f) S'agit-il de minima ? maxima ? (Il n'est pas nécessaire de calculer les dérivées partielles secondes pour cette question.)

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$.

- (a) Calculer le gradient de f en un point (x, y) .

Nom :

- (b) Calculer les points critiques de f .

- (c) Déterminer la nature des points critiques (minimum local, maximum local, point selle).

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

- (a) Calculer la matrice jacobienne de f en tout point (r, θ) .

- (b) En quels points (r, θ) la matrice jacobienne est-elle inversible ?

- (c) (*question facultative*) On pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Donner une approximation de la variation $(\Delta x, \Delta y)$ de (x, y) correspondant à la variation $(\Delta r = 0.1, \Delta \theta = 0.1)$ de (r, θ) autour de $(r, \theta) = (1, \pi/4)$.