Contrôle du 25 septembre 2015 Durée : **40** minutes

Les documents et les calculatrices scientifiques ne sont pas autorisés.

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \text{ est un réel .}$$

1. Calculer AC, ${}^tBA$, BA lorsque c'est possible.

   Réponse :

$$\begin{aligned} AC &= \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ -2 & -4 & -4 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}; \\ {}^tBA &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\alpha & 1+\alpha & -2+3\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Le produit BA n'est pas défini.

   (Remarque : la notation ${}^tBA$ signifie $({}^tB)A$ et non pas ${}^t(BA)$ cette dernière étant égale à ${}^t(BA) = ({}^tA)({}^tB)$.)

2. Calculer les déterminants de A et de C.
   Réponse :
   $\text{dét}(A) = 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - 1\cdot 1 + 2\cdot(-4) = -4,$
   $\text{dét}(C) = 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 1\cdot 4 + 1\cdot(-4) = 0.$

---

3. Calculer l'inverse de A, B, C lorsque c'est possible.

   Réponse :
   La matrice B n'est pas inversible car elle n'est pas carrée.
   La matrice C n'est pas inversible car son déterminant s'annule.

   Pour calculer l'inverse de A considérons le système $\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = a \\ x & +y & -2z & = b \\ 2x & +y & 3z & = c \end{array}\right.$
   qu'on résoud à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\|\begin{array}{lrrrl} & x & +y & +2z & = a \\ L_2 - L_1 & & & -4z & = -a + b \\ L_3 - 2L_1 & & -y & -z & = -2a + c \end{array}\right\| \begin{array}{lrrrl} & x & +y & +2z & = a \\ -L_3 & & y & +z & = 2a - c \\ -L_2 & & & 4z & = a - b. \end{array}$$

   La forme échelonnée permet de dire que toutes les inconnues sont principales et que A est donc inversible (ce qu'on pouvait déjà déduire du fait que le déterminant de A ne s'annule pas). On trouve, "en remontant le système",
   $z = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}b$ puis $y = -z + 2a - c = \frac{7}{4}a + \frac{1}{4}b - c$ et $x = a - y - 2z = \cdots = -\frac{5}{4}a + \frac{1}{4}b + c$
   d'où l'inverse de A : $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

   (Remarque : on peut vérifier que $AA^{-1} = \cdots = I_3$.)

4. Résoudre $AX = B$ en l'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ lorsque $\alpha = 3$.

   Résoudre $CX = B$ en l'inconnue X suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Réponse :
   Solution de $AX = B$ avec $\alpha = 3$:
   Avec la question précédente on a $X = A^{-1}B = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/4 \\ -11/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$.

   Solution de $CX = B$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$:

   On résoud le système $\left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = 0 \\ -x & +y & -2z & = 1 \\ x & +3y & +2z & = \alpha \end{array} \right.$ à l'aide "de Gauss" :

$$\left\| \begin{array}{lrrrl} & x & +y & +2z & = 0 \\ L_2 + L_1 & & 2y & & = 1 \\ L_3 - L_1 & & 2y & & = \alpha \end{array} \right\| \begin{array}{lrrrl} & x & +y & +2z & = 0 \\ & & 2y & & = 1 \\ L_3 - L_2 & & & 0 & = \alpha - 1. \end{array}$$

   On constate que
   — si $\alpha \neq 1$ il n'y a pas de solution,
   — si $\alpha = 1$ il existe une infinité de solutions qui sont de forme ("en remontant le système") $z \in \mathbb{R}$ (inconnue secondaire), $y = 1/2$, $x = -y - 2z = -1/2 - 2z$ ou encore $X = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} - 2z \\ \dfrac{1}{2} \\ z \end{pmatrix}$ où $z \in \mathbb{R}$.

5. (a) Déterminer $\ker(A)$.
   (b) Pour quel(s) α a-t-on $B \in \mathrm{Im}(A)$?
   (c) Pour quel(s) α a-t-on $B \in \mathrm{Im}(C)$?
   (Indication : sans faire de calcul.)

Réponse :
D'après les théorèmes généraux on a

— $\ker(A) = \{0\}$ (car A est inversible),
— On a $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$ pour tout α réel (car A est inversible),
— On a $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(C)$ si et seulement si $\alpha = 1$ (d'après (4)).

Fin