

Feuille 1

1. SYSTÈMES

(1) Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 8y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 5x + 8y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 5x + 8y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 5x + 8y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

(2) Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x + 3y + z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - 2y - z = 3 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

(3) Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ \quad - y + z = 1 \\ x \quad \quad + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ \quad - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ \quad - y + z = 1 \\ x \quad \quad + z = 1 \\ 3x - y + 4z = 4 \end{cases}$$

(4) Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y + 2z + 2t = 2 \\ x + 2y + 3z + 3t = 0 \\ -x - 2y - 2z + t = 2 \\ x + y - z - 4t = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 2z + t = 2 \\ 2x + 4y + 4z - 2t = 0 \\ -x - 2y - 2z + t = 0 \\ x + y + z - 2t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + t = 2 \\ 2x + 4y + 4z - 2t = 0 \\ -x - 2y - 2z + t = 2 \\ x + y + z - 2t = 1 \end{cases}$$

(5) Discuter suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ et résoudre $\begin{cases} x + ay + a^2z = \alpha \\ a^2x + y + az = \beta \\ ax + a^2y + z = \gamma \end{cases}$.

2. MATRICES

(1) On considère les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer chaque fois que possible

$$2A + B, 2A - D, 2B + C, 2B - 3E, 2C + 3E, 2C + F.$$

- (b) Effectuer tous les produits de deux de ces matrices qui sont possibles.
- (2) Calculer, si possible, le déterminant des matrices sous-jacentes aux systèmes des exercices de la partie “1. Systèmes”. Inverser, si possible, ces matrices.
- (3) Inverser, si possible, les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Soit $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer J^k et P^k pour $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

(5) Pour $\alpha \in \mathbf{R}$ on pose $R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$. Qu'est-ce R_0 ? Montrer que $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. En déduire que R_α est inversible et donner son inverse.

3. TRAVAUX PERSONNELS

Exercice 1. On considère les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner les tailles de ces matrices et en déduire lesquelles de ces opérations sont possibles:

$A + 2B$, $A + 2C$, $A + 2D$, AB , BA , AC , CA , AD , DA , BC , CB , BD , DB , CD , DC .

Effectuer toutes celles qui sont possibles.

Exercice 2. On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Effectuer chaque fois que possible les opérations suivantes: $A + 2B$, $A + 2C$, $B + 2C$, AB , AC , BA , CB .

Exercice 3. Inverser, si possible, les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. SOLUTIONS DES TRAVAUX PERSONNELS

Exercice 1. Les tailles sont données par $A : (2, 2)$, $B : (2, 2)$, $C : (2, 3)$, $D : (3, 2)$. On peut donc calculer:

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad AC = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad DA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad DB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad CD = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \quad DC = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad AC = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit on remarque de la question précédente que $AB = -4I$ donc que $A \times \frac{-1}{4}B = I$ donc que $A^{-1} = -\frac{1}{4}B$, soit on résout le système $AX = X'$:

$$\begin{cases} x & + & y & - & 3z & = & x' \\ x & - & 3y & + & z & = & y' \\ -3x & + & y & + & z & = & z' \end{cases} \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 + 3L_1]{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x & + & y & - & 3z & = & x' \\ -4y & + & 4z & = & -x' & + & y' \\ 4y & - & 8z & = & 3x' & + & z' \end{cases}$$

$$\xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 + L_2]{L_3 \rightarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x & + & y & - & 3z & = & x' \\ -4y & + & 4z & = & -x' & + & y' \\ -4z & = & 2x' & + & y' & + & z' \end{cases}$$

d'où $z = -\frac{1}{4}(2x' + y' + z')$ et $y = -\frac{1}{4}(x' + 2y' + z')$ et comme $x = x' - y + 3z$, on en déduit

$$\begin{cases} x & = & -\frac{1}{4}x' & - & \frac{1}{4}y' & - & \frac{2}{4}z' \\ y & = & -\frac{1}{4}x' & - & \frac{2}{4}y' & - & \frac{1}{4}z' \\ z & = & -\frac{2}{4}x' & - & \frac{1}{4}y' & - & \frac{1}{4}z' \end{cases} \quad \text{et} \quad A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même, $B^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors que C n'est pas inversible.