

Feuille 2
Vecteurs et bases dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, produits scalaire et vectoriel

1. VECTEURS ET BASES, PRODUITS SCALAIRE ET VECTORIEL

- (1) (a) Soient $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (1, 3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?
 (b) Soient $\vec{e}_1 = (1, 1)$ et $\vec{e}_2 = (-1, 1)$. Vérifiez que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$. En déduire une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$.
- (2) À l'aide du déterminant, décidez si les familles de vecteurs ci-dessous sont coplanaires ou non
 - $\vec{e}_1 = (1, 2, 3), \vec{e}_2 = (2, 3, 4), \vec{e}_3 = (1, -1, 2)$;
 - $\vec{e}_1 = (1, 1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 1), \vec{e}_3 = (1, 0, 1)$;
 - $\vec{e}_1 = (1, 1, 1), \vec{e}_2 = (2, 1, 1), \vec{e}_3 = (1, 2, 1)$;
 - $\vec{e}_1 = (1, -1, 1), \vec{e}_2 = (2, 1, 1), \vec{e}_3 = (3, 0, 2)$.
 Lesquelles des familles forment donc une base de $\mathbb{R}^3$?
- (3) Déduire une base orthonormée de $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (2, -1)$ et calculer les coordonnées de $\vec{a} = (1, 3)$ dans cette base.
- (4) (a) Soit $\vec{e}_1 = (1, 2, 2), \vec{e}_2 = (2, 1, -2)$ et $\vec{e}_3 = (-2, 2, -1)$. Vérifiez que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. En déduire une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
 (b) Soit $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et $\vec{v} = (-2, 1, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Donnez leurs coordonnées dans cette base.
- (5) Compléter $\vec{u} = (1, 1, 1), \vec{v} = (1, -2, 1)$ en une base orthogonale et en déduire une base orthonormée.
- (6) Vérifiez que $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. Exprimez les coordonnées du vecteur $(1, 1, 1)$ dans cette base.
- (7) (a) Calculez l'angle entre les vecteurs $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ et $\vec{v} = (-1, \sqrt{3})$.
 (b) Calculez l'angle entre les droites de $\mathbb{R}^3$ engendrées par les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et $\vec{v} = (1, -2, 1)$.
 (c) Même question pour $\vec{u} = (2, 1, 2)$ et $\vec{v} = (1, 1, 0)$.
- (8) On considère 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}_1 = (1, 1, 2), \vec{u}_2 = (1, 1, -1), \vec{u}_3 = (1, -1, 0), \vec{u}_4 = (2, 2, 1)$.
 - (a) Calculez $\|\vec{u}_i\|$ pour $i = 1, \dots, 4$.
 - (b) Calculez $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2, \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3, \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_4, \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3, \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_4$ et $\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_4$.
 - (c) En déduire que $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
 - (d) Calculez $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle, \langle \vec{u}_1, \vec{u}_3 \rangle, \langle \vec{u}_1, \vec{u}_4 \rangle, \langle \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle, \langle \vec{u}_2, \vec{u}_4 \rangle$ et $\langle \vec{u}_3, \vec{u}_4 \rangle$.
 - (e) Même question avec $\vec{v}_1 = (1, -1, 1), \vec{v}_2 = (2, 1, -1), \vec{v}_3 = (0, 1, 1), \vec{v}_4 = (2, 2, 1)$.
 - (f) Calculez l'angle entre $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$.

(9) On considère 4 plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$ d'équation :

$$\mathcal{P}_1 : x - y + z = 0, \quad \mathcal{P}_2 : 2x + y - 2z = 0, \quad \mathcal{P}_3 : 3x + 2y - z = 0, \quad \mathcal{P}_4 : -x + 2y + 3z = 0$$

- (a) Pour chacun de ces plans $\mathcal{P}_i$, déterminer deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ tels que $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathcal{P}_i$ et $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, puis déterminer un vecteur $\vec{e}_3$ qui soit orthogonal au deux précédents et non nuls.
- (b) On dit qu'un vecteur est orthogonal à un plan, s'il est orthogonal à tous les vecteurs du plan. Quels sont les vecteurs orthogonaux au plan d'équation $ax + by + cz = 0$ ($abc \neq 0$).
Recommencer l'exercice précédent en déterminant $\vec{e}_3$ en premier, puis un vecteur $\vec{e}_1 \in \mathcal{P}_i$ perpendiculaire à $\vec{e}_3$ qui soit de plus dans le plan $z = 0$ et enfin $\vec{e}_2$.
- (c) On demande en plus que les vecteurs de l'exercice précédent soient de norme 1.
- (10) (a) Soit $3x + y = 0$ l'équation d'une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$. Donner un vecteur qui engendre cette droite.
- (b) Soit $3x + y - z = 0$ l'équation d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner deux vecteurs qui engendrent ce plan. Donner deux vecteurs orthogonaux qui engendrent ce plan. Donner deux vecteurs orthonormés qui engendrent ce plan.
- (11) Donner l'équation du plan engendré par les deux vecteurs $\vec{u} = (2, 1, 2)$ et $\vec{v} = (1, 1, 0)$.

2. TRAVAUX PERSONNELS

(1) On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{u} = (1, 2) \quad \vec{v} = (2, 1), \quad \vec{w} = (3, 2).$$

Calculez $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$, $2\vec{u}$, $3\vec{u} + 2\vec{v}$, $3\vec{u} + 2\vec{w}$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$.

(2) On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u} = (1, 2, 3) \quad \vec{v} = (2, 1, 1), \quad \vec{w} = (3, 2, 1).$$

Calculez $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$, $2\vec{u}$, $3\vec{u} + 2\vec{v}$, $3\vec{u} + 2\vec{w}$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{w}$.

- (3) Calculez l'angle entre les vecteurs $\vec{u} = (1, \sqrt{3})$ et $\vec{v} = (1, 0)$
- (4) Soient $\vec{u} = (1, 1, -3)$, $\vec{v} = (1, -3, 1)$ et $\vec{w} = (-3, 1, 1)$.
 - (a) Calculez $\vec{u} \wedge \vec{v}$ puis $\det[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$. Qu'en déduisez vous ?
 - (b) Pour quels λ, μ, ν a-t-on $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \vec{0}$?
- (5) Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z = 0$.
 - (a) Déterminer une base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathcal{P}$ et que $\vec{e}_1$ soit dans le plan d'équation $z = 0$.
 - (b) Écrire les coordonnées du vecteur $\vec{g} = (0, 0, -g)$ dans cette base.
 - (c) Soit $\mathcal{P}'$ le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ avec a, b, c non tous trois nuls. Montrer que l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\mathcal{P}'$ (c'est-à-dire orthogonal à tout vecteur $\vec{u} \in \mathcal{P}$) est

$$\{\lambda(a, b, c) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- (6) Soient $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 2)$ et $\vec{w} = (2, 1, 1)$.
 - (a) Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont-ils coplanaires ?
 - (b) On considère $\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$. Montrer que $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
 - (c) Calculer $\vec{e}_3$.
 - (d) Exprimer $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cette base.