Université d'Orléans
Département de Mathématiques

Premier semestre, année 2017-2018
Math. pour Physique, SOL1 MT07

Feuille 3 : Applications linéaires

1. Exercices

Exercice 1.
Dire si les applications suivantes u sont linéaires de E dans F. Dans l'affirmative, on donnera les matrices associées dans les bases canoniques.

(1) Si $E = F = \mathbb{R}^2$ et $\vec{f_1}(x,y) = (y, 2x+3y)$; $\vec{f_2}(x,y) = (y+2, x+y)$ et $\vec{f_3}(x,y) = (x, y^2)$;
(2) si $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$ et $\vec{f_4}(x,y) = (3x+2y, x-y, 2x+y)$;
(3) si $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}$ et $\vec{f_5}(x,y,z) = x+3y$;
(4) si $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$ et $\vec{f_6}(x,y,z) = (2x-y, 2z-y)$.

Exercice 2.

(1) Soit (a,b,c) un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a \\ -x & - & y & + & z & = & b \\ & & y & + & 2z & = & c \end{array}\right.$
(2) Interpréter le calcul sous forme matricielle : donner la matrice M telle que $MX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et trouver M^{-1}.
(3) Interpréter le calcul à l'aide d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(x,y,z) = (a,b,c)$ et donner l'application inverse f^{-1} de f.

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ de la Feuille 1, 2.(3). Donner l'application linéaire f dont A est la matrice associée dans la base canonique. Calculer le noyau et l'image de f. Existe-t-il un $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x,y,z) = (1,2,1)$? tel que $f(x,y,z) = (1,2,2)$? Pour quel(s) $\alpha \in \mathbb{R}$ existe-t-il une solution de $f(x,y,z) = (1,2,\alpha)$? Laquelle ?

Exercice 4.
Soient $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose

$$u(\vec{i}) = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \quad u(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{k}, \quad u(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

(1) Montrer que l'on définit ainsi une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même (on donnera l'image par u de $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$). Donner la matrice M de u dans la base canonique.
(2) Soit (a,b,c) un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ x & + & y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

(3) Interpréter le calcul sous forme matricielle et trouver M^{-1}.
(4) En déduire l'application inverse $v = u^{-1}$ de u c'est-à-dire l'application $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $(v \circ u)(\vec{b}) = \vec{b}$ pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 5.
Donner la matrice dans la base canonique de l'application linéaire suivante $\vec{f}(x,y,z) = (-x+y, x+y-z, x+2z)$ et déterminer la matrice inverse et l'expression de l'application inverse par la méthode de votre choix.

Réponses (non rédigées) pour les exercices 1 à 4 :
1. $\vec{f_1}, \vec{f_4}, \vec{f_5}, \vec{f_6}$ sont linéaires, $\vec{f_2}, \vec{f_3}$ ne le sont pas. Les matrices sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la solution (unique) du système étant $x = \frac{1}{2}(3a+b-2c)$, $y = -a-b+c$ et $z = \frac{1}{2}(a+b)$.
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est donnée par $f(x,y,z) = (x+y+z, -x-y+z, y+2z)$ et l'inverse $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par $f^{-1}(u,v,w) = (\frac{3}{2}u + \frac{1}{2}v - w, -u-v+w, \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v)$.
3. L'application linéaire associée à A est $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (x+2y+z, x-2y-z, x+6y+3z)$. On a $\ker(f) = \{(0, -z/2, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z \in \mathbb{R}\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2a-b-c = 0\}$. Un $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x,y,z) = (a,b,c)$ existe ssi le système $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une solution donc ssi $(a,b,c) \in \mathrm{Im(A)}$ ou encore ssi $2a-b-c=0$. Comme $(1,2,1)$ ne satisfait pas à cette condition, l'équation $f(x,y,z) = (1,2,1)$ n'admet pas de solution, de même pour $f(x,y,z) = (1,2,2)$. Ssi α est tel que $2 \cdot 1 - 2 - \alpha = 0$ ou encore ssi $\alpha = 0$, l'équation $f(x,y,z) = (1,2,\alpha)$ admet une solution, plus précisément une infinité de solutions à savoir $(x,y,z) = (3/2, -1/4 - z/2, z)$ où $z \in \mathbb{R}$.
4. $u(\vec{i}) = (2,1,1)$, $u(\vec{j}) = (1,0,1)$, $u(\vec{k}) = (1,1,1)$ donc $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x+z \\ x+y+z \end{pmatrix}$ donc $u(x,y,z) = (2x+y+z, x+z, x+y+z)$. Avec la méthode de Gauss on obtient les solutions du système (qui s'écrit $MX = B$) : $x = a-c$, $y = -b+c$ et $z = -a+b+c$ (qu'on interprète comme $X = M^{-1}B$) d'où $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
$v(a,b,c) = (a-c, -b+c, -a+b+c)$.
5. La matrice de $\vec{f}$ est $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d'où $M^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{f}^{-1}(x,y,z) = \frac{1}{5}(-2x+2y+z, 3x+2y+z, x-y+2z)$.

2. Travaux Personnels

(1) Parmis les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Dans l'affirmative, donner la matrice associée dans les bases canoniques.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x+y \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & e^{x+y} \end{array}$$

$$f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x-2y) \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, e^{x+y}) \end{array}$$

$$f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y, y+z) \end{array} \qquad f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y, y+z, 2x+y) \end{array}$$

(2) On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = \frac{1}{3}(1,2,2)$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{3}(2,1,-2)$, $\vec{e}_3 = \frac{1}{3}(2,-2,1)$.
  (a) Montrer que c'est une base orthonormée.
  (b) On considére l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f(\vec{i}) = \vec{e}_1$, $f(\vec{j}) = \vec{e}_2$ et $f(\vec{k}) = \vec{e}_3$. Donnez sa matrice P dans la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ et calculer $f(x,y,z)$.
  (c) Calculez l'inverse P^{-1} de P.
  (d) On considère $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par $g(x,y,z) = (-x+2z, y+2z, 2x+2y)$. Montrer que g est linéaire et donner sa matrice A dans la base canonique.
  (e) Calculez de deux façons différentes la matrice C de $g \circ f$ dans la base canonique.
  (f) Donner la matrice B de g dans la base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ $\vec{e}_3$.

3. Solution des travaux personnels

(1) $f_1(\lambda x + \mu x') = 2(\lambda x + \mu x') = \lambda 2x + \mu 2x = \lambda f_1(x) + \mu f_1(x)$, f_1 linéaire.
$f_2(0+1) = e$ alors que $f_2(0) + f_2(1) = 1 + e \neq f_2(0+1)$, f_2 non linéaire. De même, f_4 et f_6 ne sont pas linéaires.
$f_3\big(\lambda(x,y) + \mu(x',y')\big) = f_3(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') = 2(\lambda x + \mu x') + \lambda y + \mu y' = \lambda(2x + y) + \mu(2x' + y') = \lambda f_3(x,y) + \mu f_3(x',y')$ donc f_3 est linéaire. De même, f_5, f_7 et f_8 sont linéaires.
La matrice M_i associée à f_i pour $i = 1,3,5,7,8$ est : $M_1 = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $M_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(2) (a) Il faut vérifier que $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_1\| = 1$ et que $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = 0$. Ceci s'obtient par des calculs simples, par exemple :

$$\|\vec{e}_1\| = \frac{1}{3}\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{1}{3}\sqrt{9} = 1$$

et

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \frac{1}{9}(1 \times 2 - 2 \times 2 + 2 \times 1) = 0.$$

  (b) On a $f(\vec{i}) = \vec{e}_1 = \frac{1}{3}(1,2,2)$, $f(\vec{j}) = \vec{e}_2 = \frac{1}{3}(2,1,-2)$ et $f(\vec{k}) = \vec{e}_3 = \frac{1}{3}(2,-2,1)$, la matrice de f dans la base canonique est donc

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et $f(x,y,z) = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z, 2x + y - 2z, 2x - 2y + z)$.

(c) En résolvant $PX = B$ par la méthode de Gauss on trouve que

$$P^{-1} = P^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Pour vérifier la linéarité :

$$\begin{aligned} g\big(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')\big) =& g(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z') \\ =& (-\lambda x-\mu x'+2\lambda z+2\mu z', \lambda y+\mu y'+2\lambda z+2\mu z', \\ & \quad 2\lambda x+2\mu x'+2\lambda y+2\mu y') \\ =& \lambda(-x+2z, y+2z, 2x+2y)+\mu(-x+2z, y+2z, 2x+2y) \\ =& \lambda g(x,y,z)+\mu g(x',y',z') \end{aligned}$$

et la matrice de g dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(e) On a $(g \circ f)(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = g(\frac{1}{3}(x+2y+2z, 2x+y-z, 2x-2y+z)) = (x-2y, 2x-y, 2x+2y)$ d'où $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient la même matrice en calculant $C = AP$.

(f) On a $g(\vec{e}_1) = (1,2,2) = 3\vec{e}_1$, $g(\vec{e}_2) = (-2,-1,2) = -3\vec{e}_2$ et $g(\vec{e}_3) = \vec{0}$ donc $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.