

Feuille 4 : Fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Exercice 1

La figure 1 est une carte du relief d'une presqu'île : le contour extérieur est la ligne de niveau 0 (bord de mer). L'équidistance des lignes de niveau est de 25 mètres.

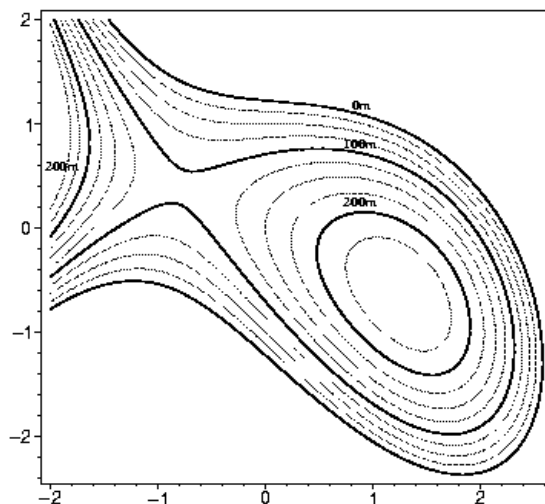


Figure 1: une presqu'île

1. Un skieur de fond perdu dans le brouillard s'arrête, les skis bien horizontaux pour ne pas glisser, et cherche à se repérer à l'aide de son altimètre et de sa boussole. Il voit qu'il se trouve à 100 mètres d'altitude, avec ses skis orientés droit vers l'est. La pente est descendante vers sa gauche. Quelles est sa position sur la carte ?¹ Si $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction qui donne l'altitude en un point $\vec{u}$ à quoi alors correspond $\text{grad } h(\vec{u})$?
2. Le skieur décide de continuer son chemin à la boussole, droit vers l'est, jusqu'à atteindre la mer. Dessinez le profil du relief le long de l'itinéraire qui l'attend, en évaluant les dénivelés successifs.
3. Regardant mieux son altimètre avant de se mettre en route, le skieur s'aperçoit avec effroi que celui-ci est cassé, de sorte qu'il ne peut connaître son altitude et que ce qu'il avait déduit en (1) est erroné. Tracez sur la carte l'ensemble de ses positions possibles.

Exercice 2

Donnez le domaine de définition des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ données par :

- | | | | |
|--------|--|---------|---------------------------------------|
| $i)$ | $(x, y) \mapsto \frac{1}{1-x-y},$ | $ii)$ | $(x, y) \mapsto \frac{x}{1-x^2-y^2},$ |
| $iii)$ | $(s, t) \mapsto \frac{1}{1+s^2+t^2},$ | $iv)$ | $(u, v) \mapsto \sqrt{9-u^2-v^2},$ |
| $v)$ | $(x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}},$ | $vi)$ | $(x, y) \mapsto \exp(1-2x^2+3y^2),$ |
| $vii)$ | $(x, y) \mapsto \ln(1-4x^2-4y^2),$ | $viii)$ | $(x, y) \mapsto 2^{1-x^2-y^2}.$ |

¹Deux positions possibles

Exercice 3

Evaluer la limite si elle existe ou expliquer pourquoi elle n'existe pas

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2};$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2};$

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)};$

4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2};$

5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 - xy}{4x^2 - y^2}.$

Exercice 4

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y, z) = \exp(3x + 4y) \sin(5z)$ satisfait l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Exercice 5

Montrer que la fonction $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $u(t, x) = t^{-1/2} \exp(-x^2/4t)$ satisfait l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Exercice 6

Tracez les courbes de niveau des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ données par

$$\begin{array}{lll} i) & (x, y) \mapsto \frac{x}{x+y}, & ii) \quad (x, y) \mapsto \sqrt{x+y}, \quad iii) \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}, \\ iv) & (x, y) \mapsto \frac{1+2x}{x^2+y^2}, & v) \quad (x, y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{1+2x}, \quad vi) \quad (x, y) \mapsto \ln(1-4x^2-4y^2). \end{array}$$

Donner l'ensemble sur lequel les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$, calculer leurs dérivées partielles puis leur gradient.

Exercice 7 Déterminer la matrice jacobienne de $\vec{f}$ en $\vec{u}_0$ pour

1. $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \vec{f}(x, y) = (x^2y, x^3y, e^{x+y})$; $\vec{u}_0 = (0, 0)$ puis $\vec{u}_0 = (1, 2)$.
2. $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \vec{f}(x, y, z) = (\frac{x+y+z}{1+x^2+y^2+z^2}, \ln(1+x^2+y^2+z^2))$; $\vec{u}_0 = (0, 0, 0)$ puis $\vec{u}_0 = (1, 0, 1)$.

Exercice 8

Déterminer les points critiques pour chacune des fonctions suivantes (définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) et discuter leur extrémalité.

- (i) $f(x, y) = x + y$; (ii) $f(x, y) = x^2 + y^2$; (iii) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \exp(-(x^2 + y^2))$;
(iv) $f(x, y) = x + y + xy$; (v) $f(x, y) = xy$; (vi) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 4y + 2$.