L1 Physique
Université d'Orléans
2016-17, Semestre 1
Mathématiques

Corrigé de la partie B
de l'examen du 5 janvier 2017

Exercice 1

(a)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \\ 1+2\alpha & 2 & -1+\alpha \end{pmatrix}$$

(b) le produit MN est possible ssi nb de colonnes de M = nb de lignes de N ;
donc le produit AC n'est pas possible et
les produits BA, CA et C^2 sont possibles

(c) Une matrice est inversible ssi elle est carrée et son déterminant est non nul.
On calcule donc le déterminant de AB.

Méthode 1 : opérations élémentaires sur les lignes :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \\ 1+2\alpha & 2 & -1+\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 12 & -9 \\ 0 & 4+4\alpha & -3-3\alpha \end{vmatrix} = 3(1+\alpha)\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1+\alpha)\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Méthode 2 : développement suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \\ 1+2\alpha & 2 & -1+\alpha \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1+\alpha \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1+\alpha \end{vmatrix} + (1+2\alpha)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(4\alpha-2) - 4(2\alpha+2) + (1+2\alpha)\,6$$

$$= (-4-8+12)\alpha + 2 - 8 + 6 = 0$$

Il n'y a pas de α pour lequel AB est inversible.

(d) Par définition $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est dans le noyau de AB ssi $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On transforme ce système en un système triangulaire équivalent par opérations élémentaires sur les lignes. Avec la notation habituelle, on a

$$\left.\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right. \hookrightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \hookrightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right.$$

c.a.d $\begin{cases} -x + 2y - 2z = 0 \\ \quad 4y - 3z = 0 \end{cases}$. On exprime les solutions en fonction

de z : $\quad y = \frac{3}{4} z \quad , \quad x = 2y - 2z = -\frac{1}{2} z$

ou encore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$. Le noyau de AB est donc la droite de vecteur

directeur $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ (ou $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ pour avoir un vecteur qui a des coordonnées entières).

(e) On sait que l'image de AB est le sous-espace vectoriel engendré par ses vecteurs-colonnes $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Comme le déterminant de AB est nul, cette famille est liée. D'autre part $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Ils forment donc une base de l'image de AB, qui est donc un plan vectoriel. On obtient un vecteur normal à ce plan en faisant le produit vectoriel de ces deux vecteurs :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On prend plutôt le vecteur colinéaire $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

L'image de AB est donc le plan vectoriel d'équation

$$x - z = 0$$

On peut aussi voir directement qu'un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vérifie

$\begin{cases} a = -x + 2y - 2z \\ b = 4x + 4y - z \\ c = -x + 2y - 2z \end{cases}$ pour un certain triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ssi il vérifie $a = c$

Exercice 2

(a) L'équation du plan P peut être écrite $\vec{n}.\vec{X} = 0$
en posant $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\vec{n}$ est donc un vecteur normal au plan.

(b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie l'équation du plan ssi

$$\lambda + 4.3 - 3.4 = 0$$

c.a.d $\quad \lambda = 0$

(c) On a donc $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Nécessairement $\vec{w}$, qui est orthogonal à deux vecteurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$ linéairement indépendants, est colinéaire à $\vec{n}$. On peut donc prendre $\vec{w} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Il suffit alors de prendre $\vec{v} = \vec{n} \wedge \vec{u}$; un tel vecteur est orthogonal à $\vec{u}$ et appartient à P car il est orthogonal à $\vec{n}$.

$$\vec{v} = \vec{n} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(d) On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2+4^2+3^2} = \sqrt{26}$

$\|\vec{v}\| = \|\vec{n}\|\|\vec{u}\| = 5\sqrt{26}$. D'où

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{1}{5\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 25 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(e) Dans la base orthonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on a la formule

$$\vec{a} = (\vec{a}.\vec{e}_1)\,\vec{e}_1 + (\vec{a}.\vec{e}_2)\,\vec{e}_2 + (\vec{a}.\vec{e}_3)\,\vec{e}_3$$

On calcule $\vec{a}.\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{7}{5}$, $\vec{a}.\vec{e}_2 = \frac{24}{5\sqrt{26}}$, $\vec{a}.\vec{e}_3 = \frac{2}{\sqrt{26}}$

D'où $\quad \vec{a} = \frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{24}{5\sqrt{26}}\vec{e}_2 + \frac{2}{\sqrt{26}}\vec{e}_2$

Exercice 3

(a) La fonction f est différentiable (en fait $\mathcal{C}^\infty$ car c'est un polynôme en x, y). Les points critiques sont les solutions du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

Ici $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y + 2x + 4$

Cela donne le système linéaire

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$$

qui admet une unique solution $(x,y) = (2,-2)$

Il y a donc un seul point critique, le point $(2,-2)$.

(b) Par définition, la matrice hessienne de f en (x,y) est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\[2mm] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

On calcule les dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4$$

Elles ne dépendent pas de (x,y). On a $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(c) On a $2 > 0$ et $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 > 0$. D'après le cours, $H_f(2,-2)$

est définie positive et $(2,-2)$ est un minimum local (strict).

(d) f n'admet pas de majorant sur $\mathbb{R}^2$, par exemple $f(x,0) = x^2 + 2$

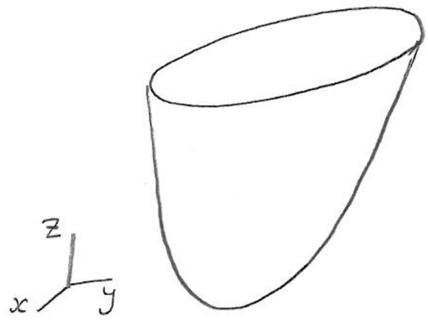
tend vers $+\infty$ quand x tend vers l'infini. Donc f n'a pas de maximum.

On a $f(2,-2) = -2$. Montrons que $f(x,y) \geq -2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+y)^2 + y^2 + 4y + 2 \\ &= (x+y)^2 + (y+2)^2 - 2 \\ &\geq -2 \end{aligned}$$

Donc $(2,-2)$ est un minimum global.

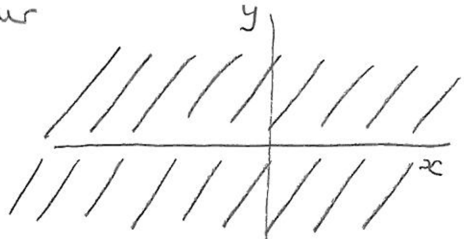
On peut noter que le graphe de f est un paraboloïde



Exercice 4

On pose $g_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et $g_2(x,y) = \dfrac{y}{x}$

(a) g_1 est définie sur $\mathbb{R}^2$ et g_2 est définie sur
$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$
C'est le complémentaire de l'axe des x
Le domaine de g est donc U.



(b) g_1 est la composée de $(x,y) \overset{h}{\mapsto} t = x^2+y^2$ et de $t \overset{\sqrt{\ }}{\mapsto} \sqrt{t}$
h est de classe C^1 sur U (et même sur $\mathbb{R}^2$).
De plus $h(U) = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\} = \mathbb{R}_+^*$
La fonction racine carrée $\sqrt{\ }$ est de classe C^1 sur $h(U)$. Donc la composée g_1 est de classe C^1 sur U.
La fonction rationnelle g_2 est de classe C^1 (et même C^∞) sur son domaine de définition.
Donc g est de classe C^1 sur U.

(c) Par définition, la matrice jacobienne de g au point $(x,y) \in U$ est

$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

On calcule

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}$$

D'où

$$J_g(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$