Notes de cours de SOL4MT12

Nawfal EL HAGE HASSAN

6 janvier 2016

Table des matières

Chapitre 1

SUITES NUMÉRIQUES

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1.1. Une **suite** (**numérique**) est une application de $\mathbb{N}$, privé éventuellement d'un nombre fini d'éléments, dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si x désigne une telle application, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $x_n = x(n)$ est appelé le **terme général d'ordre** n de la suite et on note $(x_n)_{n\geq 0}$ ou $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite elle-même.
Une **suite réelle** (*resp.* **complexe**) est une suite numérique telle pour tout $n \geq 0$, $x_n \in \mathbb{R}$ (*resp.* $x_n \in \mathbb{C}$).

Exemple 1.1.1. $((-1)^n)$, $(\frac{1}{n})$ et (n^2) sont des suites réelles.

Définition 1.1.2. Deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ sont **égales** si, pour tout $n \geq 0$, on a $x_n = y_n$.

Remarque 1.1.1. Il ne faut pas confondre l'ensemble $E = \{x_n \ ; \ n \geq 0\}$ des éléments de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ et la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Par exemple, les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ définies respectivement par $x_n = (-1)^n$ et $y_n = (-1)^{n+1}$ ont un même ensemble d'éléments $E = \{-1, 1\}$, mais ne sont pas égales.

Définition 1.1.3.
1. Une suite réelle $(x_n)_{n\geq 0}$ est dite **majorée** (*resp.* **minorée**) si l'ensemble de ses termes est une partie de $\mathbb{R}$ majorée (*resp.* minorée), ce qui peut s'écrire :
   Il existe $M \in \mathbb{R}$ (*resp.* $m \in \mathbb{R}$) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq M$ (*resp.* $m \leq x_n$).
2. Une suite numérique $(x_n)_{n\geq 0}$ est dite **bornée** s'il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|x_n| \leq A$.

Remarque 1.1.2. Une suite réelle est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

1.2 Convergence

Définition 1.2.1. Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est dite **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ vérifiant :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|x_n - \ell| < \varepsilon$.
Le nombre ℓ est appelé **limite** de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. On dit que $(x_n)_{n\geq 0}$ a pour limite ℓ ou que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ **converge** vers ℓ. On écrit alors $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ ou $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Rappel. Le corps $\mathbb{R}$ est **archimédien**, *i.e.* pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a > 0$ et $b > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a \leq nb$.

Exemple 1.2.1.
1. La suite $(\frac{1}{n})$ a pour limite 0.
2. La suite $((-1)^n)$ n'est pas convergente car pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, on a $\max\big(|\ell - 1|, |\ell + 1|\big) \geq 1$.

Remarque 1.2.1. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On déduit immédiatement de la définition que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty} x_n - \ell = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |x_n - \ell| = 0\,.$$

Proposition 1.2.1. *Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.*

Proposition 1.2.2. *Toute suite convergente est bornée.*

Remarque 1.2.2. Une suite bornée n'est pas forcément convergente. Par exemple, la suite $((-1)^n)$ est bornée et divergente.

Parmi les suites non bornées, on va distinguer des suites particulières :

Définition 1.2.2. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.
1. On dit que $(x_n)_{n\geq 0}$ **tend vers** $+\infty$ si pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n \geq A$. Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ ou $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. On dit que $(x_n)_{n\geq 0}$ **tend vers** $-\infty$ si pour tout $B < 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n \leq B$. Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ ou $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Remarque 1.2.3.
1. Une suite réelle qui tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, n'est pas bornée. Mais la réciproque est fausse. Par exemple, la suite $((-1)^n n)$ n'est pas bornée, mais elle ne tend pas vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = +\infty \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Théorème 1.2.1. *Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles convergentes telles que $x_n \leq y_n$ pour tout $n \geq N$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.*

Corollaire 1.2.1. *Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle convergente et $a, b \in \mathbb{R}$.*

1. *S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $a \leq x_n$, alors on a $a \leq \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.*
2. *S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n \leq b$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leq b$.*

Théorème 1.2.2. *Soient $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ des suites réelles telles que :*

(α) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n \leq y_n \leq z_n$.

(β) Les deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite ℓ.

Alors la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.

Proposition 1.2.3. *Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ des suites réelles telles que $x_n \leq y_n$ pour tout $n \geq N$. On a :*

1. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.*
2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.*

Théorème 1.2.3. *Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ des suites convergeant respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2. Alors on a :*

1. *Les suites $(x_n + y_n)_{n\geq 0}$ et $(x_n y_n)_{n\geq 0}$ convergent respectivement vers $\ell_1 + \ell_2$ et $\ell_1 \ell_2$.*
2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la suite $(\lambda x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\lambda \ell_1$.*
3. *Si $\ell_2 \neq 0$, la suite $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\geq 0}$ est définie pour n assez grand et converge vers $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.*

1.3 Suites monotones ; suites adjacentes

Définition 1.3.1. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.

1. On dit que $(x_n)_{n\geq 0}$ est **croissante** si pour tout $n \geq 0$, on a $x_n \leq x_{n+1}$.
2. On dit que $(x_n)_{n\geq 0}$ est **décroissante** si pour tout $n \geq 0$, on a $x_{n+1} \leq x_n$.
3. On dit que $(x_n)_{n\geq 0}$ est **monotone** si $(x_n)_{n\geq 0}$ est croissante ou si $(x_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

Théorème 1.3.1. *1. Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.*

2. *Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.*

Proposition 1.3.1. 1. *Toute suite réelle croissante non majorée tend vers $+\infty$.*

2. *Toute suite réelle décroissante non minorée tend vers $-\infty$.*

Définition 1.3.2. Deux suites réelles $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ sont dites **adjacentes** si $(x_n)_{n\geq 0}$ est croissante, $(y_n)_{n\geq 0}$ décroissante, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n - x_n = 0$.

Théorème 1.3.2. *Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites adjacentes. Alors on a :*

1. *Pour tout $n \geq 0$, on a $x_n \leq y_n$.*
2. *Les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ sont convergentes et ont la même limite.*

1.4 Suites extraites

Définition 1.4.1. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. On dit qu'une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est une **suite extraite** ou **sous-suite** de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ s'il existe une application strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $y_n = x_{\varphi(n)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.4.1. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite, alors les suites $(x_{2n})_{n\geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont des suites extraites de $(x_n)_{n\geq 0}$.

Lemme 1.4.1. *Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \geq n$.*

Théorème 1.4.1. *Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique.*

1. *Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente et a pour limite ℓ, alors toute suite extraite de $(x_n)_{n\geq 0}$ converge aussi vers ℓ.*
2. *Si les deux suites extraites $(x_{2n})_{n\geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont convergentes et ont la **même** limite ℓ, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente et a pour limite ℓ.*

Remarque 1.4.1. Il existe des suites divergentes dont on peut extraire des suites convergentes. Par exemple, la suite de terme général $x_n = (-1)^n$ est divergente, et pourtant les suites extraites $(x_{2n})_{n\geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont convergentes.

Théorème 1.4.2 (Bolzano-Weirstrass)**.** *De toute suite numérique bornée, on peut extraire une suite convergente.*

1.5 Suites de Cauchy

On va démontrer un critère de convergence des suites numériques qui ne fait pas intervenir la limite.

Définition 1.5.1. On dit qu'une suite numérique $(x_n)_{n\geq 0}$ est **de Cauchy** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p \geq N$ et $q \geq N$, on ait $|x_p - x_q| < \varepsilon$.

Proposition 1.5.1. *Toute suite numérique convergente est de Cauchy.*

Proposition 1.5.2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Lemme 1.5.1. *Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ admet une suite extraite qui converge vers ℓ, alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge aussi vers ℓ.*

Théorème 1.5.1. *Une suite numérique est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Exemple 1.5.1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Alors la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc convergente.

1.6 Fonctions continues et suites numériques

Théorème 1.6.1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de I convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(a)$.*

1.7 Suites récurrentes

Définition 1.7.1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow I$ une fonction. Toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par x_0 donné dans I, et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est appelée **suite récurrente**.

Exemple 1.7.1. La suite définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n}$ est une suite récurrente, qui peut être associée à la fonction f définie sur $I = [0,\, 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Proposition 1.7.1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow I$ une fonction et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par x_0 donné dans I, et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *Si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ell \in I$ et si f est continue en ℓ, alors on a $f(\ell) = \ell$.*
2. *Si f est croissante, alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est monotone. Si de plus I est borné, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente.*
3. *Si f est décroissante, alors les suites $(x_{2n})_{n\geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont monotones et ont des sens de variations opposés. Si de plus I est borné, alors les suites $(x_{2n})_{n\geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont convergentes. Si elles ont la même limite ℓ, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ. Sinon, $(x_n)_{n\geq 0}$ est divergente.*

Exemple 1.7.2. Étudier la suite définie par $x_0 \in [0,\, 2]$ et $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.7.3. Étudier la suite définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \dfrac{1}{1 + x_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.7.2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\,:I \longrightarrow I$ une fonction. On dit que f est **contractante** s'il existe une constante $K \in [0,\, 1[$ telle que pour tout $x, y \in I$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y\||$.

Remarque 1.7.1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\,:I \longrightarrow I$ une fonction.

1. Si f est contractante, alors f est continue.
2. Supposons f dérivable sur I et à dérivée bornée. Notons $K = \sup\limits_{x \in I} |f'(x)|$. D'après le théorème des accroissements finis, on a alors $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Si $K \in [0,\, 1[$, alors f est contractante. Par exemple, si $I = [\frac{1}{2},\, 1]$ et si $f(x) = \frac{1}{1+x}$, alors on a $f(I) \subset I$, f est dérivable sur I et on a $|f'(x)| \leq \frac{4}{9} < 1$, pour tout $x \in I$.

Théorème 1.7.1 (Du point fixe)**.** *Soient $I = [a,\, b]$ un intervalle borné fermé de $\mathbb{R}$ et $f\,:I \longrightarrow I$ une fonction contractante. Alors on a :*

1. *L'équation $f(x) = x$ a une unique solution r dans I, appelée* **point fixe** *de f dans I.*
2. *Toute suite récurrente définie par $x_0 \in I$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers ce point fixe r.*

1.8 Exercices

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(|u_n|)$ converge. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer qu'une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si, la suite de réels positifs $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0.
3. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si les deux sous-suites (z_{2n}) et (z_{2n+1}) convergent vers la même limite.
4. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que les sous-suites (z_{2n}), (z_{2n+1}), (z_{3n}) convergent. Montrer que la suite (z_n) converge.
5. Montrer qu'une suite complexe (z_n) est convergente si et seulement si les deux suites réelles (u_n) et (v_n), respectivement partie réelle et imaginaire de (z_n), sont convergentes.
6. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers 0 et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Montrer que la suite $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
7. Etudier la convergence de la suite $(a^n)_{n\geq 0}$, où a est un réel fixé.
8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que :
   (a) S'il existe un réel λ et un entier p tels que $\forall n \geq p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq \lambda > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;
   (b) S'il existe un réel λ et un entier p tels que $\forall n \geq p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   (c) Énoncer des résultats analogues si l'on suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l \in [0, +\infty]$.
   (d) Étude des suites $u_n = \dfrac{n^\alpha}{n!}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\frac{5^n}{n!}$ et $\frac{n!}{n^n}$.
9. Étudier les suites suivantes, définies par leur terme général u_n

$$u_n = \frac{n^2+1}{\sqrt{n^4+1}} \ ; \ u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n+5} \ ; \ u_n = \frac{n^2}{2^n} \ ; \ u_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n \ ; \ u_n = \frac{2^n}{n!}$$

$$u_n = \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\sqrt{n^6+1}} \ ; \ u_n = n^{1/n} \ ; \ u_n = ne^{-n} \ ; \ u_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$u_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n+1}} \ ; \ u_n = \sin(\frac{n\pi}{3}) \ ; \ u_n = \frac{a^n}{n!}, \ a \in \mathbb{R} \ ; \ u_n = \frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{(n+1)^2}$$

$$u_n = 2^n \sin(\frac{\theta}{2^n}), \ \theta \in \mathbb{R} \ ; \ u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} \ ; \ u_n = (1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})\cdots(1-\frac{1}{2n+1}) \ ;$$

10. Montrer que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \text{ où } x\in\mathbb{R} \ ; \ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \ ; \ \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1 \ ; \ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = +\infty \ ; \ \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = 0.$$

11. Déterminer les constantes $a, b > 0$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty} n^b\left(\sqrt{an^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$ soit finie.

12. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\dfrac{\alpha}{\pi}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

    (a) Montrer que

    $$\lim_{n\to+\infty}\sin(n\alpha) \text{ existe} \iff \lim_{n\to+\infty}\cos(n\alpha) \text{ existe}$$

    (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(n\alpha)$ n'existe pas.

    (c) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. En déduire que

    (i) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(n\alpha)$ existe $\iff$ $\alpha\in\pi\mathbb{Z}$, et que dans ce cas, on a $\sin(n\alpha)=0$.

    (ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(n\alpha)$ existe $\iff$ $\alpha\in 2\pi\mathbb{Z}$, et que dans ce cas, on a $\cos(n\alpha)=1$.

    (iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{in\alpha}$ existe $\iff$ $\alpha\in 2\pi\mathbb{Z}$, et que dans ce cas, on a $e^{in\alpha}=1$.

13. Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que si (u_n) est convergente dans $\mathbb{R}$, elle possède au moins l'une des propriétés suivantes :

    (a) il existe un indice h tel que $u_h = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$;

    (b) il existe un indice k tel que $u_k = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

14. (**Moyenne de Césaro**) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes convergeant vers ℓ. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

    $$v_n = \frac{1}{n}(u_1+u_2+\cdots+u_n).$$

    (a) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$. La réciproque est-elle vraie ?

    (b) Démontrer que, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs converge vers ℓ, alors il en est de même de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = \sqrt[n]{u_1u_2\dots u_n}$. Réciproque ?

(c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n), \quad w_n = \frac{1}{n}(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2).$$

– Prouver l'inégalité suivante : $(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)^2 \leq n(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)$.

– Montrer que, si $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$. Réciproque ?

(d) Montrer que si la suite $x_{n+1} - x_n$ a pour limite ℓ, la suite (x_n/n) a pour limite ℓ.

(e) Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs, et si la suite x_{n+1}/x_n a pour limite ℓ, la suite $\sqrt[n]{x_n}$ a pour limite ℓ.

(f) Étudier la convergence et déterminer la limite des suites :

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{pn}, \qquad v_n = \sqrt[n]{n^3 + n^2 - 1}.$$

15. Montrer que la suite $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ n'est pas de Cauchy.
16. Montrer que la suite $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ est de Cauchy.
17. Montrer que la suite $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ est convergente et calculer sa limite.
18. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $u_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(z)$ existe. (On appelle cette limite "exponentielle de z" et on la note e^z.
19. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée et p un nombre positif. Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{p^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Application : on fixe un entier naturel $p > 1$ et on suppose $a_n \in \{0, \ldots, p-1\}$; alors la limite en question est le développement $p-$adic d'un nombre réel dans $[0,\ 1]$.
20. On considère une suite de nombres complexes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle existe $k \in [0, 1[$ tel que, $\forall\, n \geq 1$, on ait $|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|$. Montrer que (x_n) converge en utilisant le critère de Cauchy.
21. Montrer que les deux suites suivantes sont adjacentes :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \ ; \ v_n = u_n + \frac{1}{2n+1}$$

Que peut-on conclure ?

22. On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$, avec $0 < a < b$. On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}\,.$$
Montrer que ces deux suites sont adjacentes, et en déduire qu'elles convergent vers une limite $\ell \in]\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}[$.
23. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $T_n = S_n + \frac{1}{nn!}$. Montrer que S et T sont deux suites adjacentes. En déduire que e est irrationnel.
24. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{Q}$ et $v \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que $|u - \alpha| < \varepsilon$ et $|v - \alpha| < \varepsilon$. Autrement dit, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
25. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$ est convergente.
26. Soient a et b deux nombres réels donnés avec $0 < a < 1$. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & \in & \mathbb{R} \\ x_{n+1} & = & a\sin(x_n) + b \ \ \forall\, n \geq 0 \end{array}\right.$$
27. Étudier les suites récurrentes suivantes, suivant la valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.
$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}\ ;\ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}\ ;\ u_{n+1} = \frac{4}{\pi}\arctan(u_n)\ ;\ u_{n+1} = \ln(1+u_n)\,.$$
28. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$x_0 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \ \ \forall\, n \geq 0$$
29. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$x_0 \geq \sqrt{a} \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) \ \ \forall\, n \geq 0$$
30. Étudier les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 1 \\ x_{n+1} & = & \dfrac{x_n}{1+x_n^2} \ \ \forall\, n \geq 0 \end{array}\right. ,\qquad \left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 0 \\ x_{n+1} & = & \dfrac{8+x_n^2}{6} \ \ \forall\, n \geq 0 \end{array}\right.$$
31. Étudier les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 1 \\ x_{n+1} & = & \dfrac{1}{2+x_n} \ \ \forall\, n \geq 0 \end{array}\right. ,\qquad \left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 0 \\ x_{n+1} & = & \dfrac{2}{1+x_n^2} \ \ \forall\, n \geq 0 \end{array}\right.$$

32. On considère la suite récurrente $u_{n+1} = \dfrac{3+2u_n}{2+u_n} = f(u_n)$, $u_0 = -1$.
   (a) Montrer que l'équation $\ell = f(\ell)$ admet deux solutions ℓ_1 et ℓ_2.
   (b) Montrer que la suite $v_n = \dfrac{u_n - \ell_1}{u_n - \ell_2}$ est une suite géométrique, et calculer v_n.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis la limite de (u_n).
   (d) Peut-on appliquer le théorème du point fixe ?
33. On considère la fonction $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$, on se donne un réel $x_0 \in \mathbb{R}$, et on se fixe pour but d'étudier la suite définie par récurrence par : $u_0 = x_0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Tracer le graphe de la fonction f, déterminer ses zéros et ses deux points fixes $\alpha < \beta$.
   (b) Soit $I = [-\frac{1}{4}, 0]$. Montrer que $f(I) \subset I$ et donner une majoration de $|f'(t)|$, $t \in I$. En déduire que si $x_0 \in I$, alors la suite (u_n) converge vers α.
   (c) On suppose que $x_0 \in]-\beta, \beta[$. Montrer qu'il existe un entier n, pouvant dépendre de x_0, tel que $u_n \in I$ et en déduire que la suite (u_n) converge encore vers α.
   (d) Étudier la suite (u_n) si $x_0 = \pm\beta$ puis si $|x_0| > \beta$.
34. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + b.$$

   (a) Démontrer que si $a = 1$, $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ $u_n = u_0 + nb$, et que si $a \neq 1$, $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ $u_n - r = a^n(u_0 - r)$ (déterminer le nombre r).
   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
35. On considère la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$; $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que l'équation $f(\ell) = \ell$ admet deux solutions ℓ_1 et ℓ_2.
   (b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n - \ell_1}{u_n - \ell_2}$ est une suite géométrique.
   (c) Exprimer le terme général v_n en fonction de n, puis le terme général u_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Chapitre 2

SÉRIES NUMÉRIQUES

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1.1. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On appelle **série de terme général** x_n, notée $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ ou $\sum x_n$, le couple des deux suites $\big((x_n)_{n\geq 0}, (S_n)_{n\geq 0}\big)$ où $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} x_p$ est la **somme partielle** des $n+1$ premiers termes de la série.

Parfois on considère une suite $(x_n)_{n\geq n_0}$. On lui associe la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que $x_n = 0$ pour $0 \leq n \leq n_0 - 1$, et la série correspondante sera notée $\sum\limits_{n\geq n_0} x_n$.

Définition 2.1.2. Si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ a une limite S, on dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ est **convergente** et a pour somme S. On note alors $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$.
Si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ n'a pas de limite, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ est dite **divergente**.
Étudier si une série donnée est convergente ou divergente, c'est étudier sa nature.

Définition 2.1.3. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ une série convergente ayant pour somme S. Le réel $R_p = S - S_p$ est appelé **reste d'ordre** p de la série. En fait, on a $R_p = \sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} x_n$.
Notez que la série $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ converge vers S se traduit par $\lim\limits_{p\to+\infty} R_p = 0$.

Exemple 2.1.1 (Série géométrique). C'est une série de terme général $x_n = aq^n$, avec $a, q \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

1. Si $q = 1$, on a $S_n = (n+1)a$, donc la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ diverge.
2. Si $q \neq 1$, on a $S_n = a\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
   (i) Pour $|q| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, donc la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge et a pour somme $\dfrac{a}{1-q}$.
   (ii) Pour $|q| > 1$ ou $q = -1$, la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ n'a pas de limite et la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ diverge.

Exemple 2.1.2. Série de terme général $x_n = f(n+1) - f(n)$, où f est une fonction donnée. On a alors $S_n = \sum_{p=0}^{n} x_p = f(n+1) - f(0)$. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge si, et seulement si, la suite $(f(n))_{n\geq 0}$ est convergente.
Exemple, considérons la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$. On a $\dfrac{1}{n(n+1)} = -\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n}$, d'où $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente et a pour somme 1.

Proposition 2.1.1. *Soient $\sum_{n\geq 0} x_n$ et $\sum_{n\geq 0} y_n$ deux séries convergentes et ont pour sommes respectives S et T. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :*

1. *La série $\sum_{n\geq 0} x_n + y_n$ est convergente et a pour somme $S + T$.*
2. *La série $\sum_{n\geq 0} \lambda x_n$ est convergente et a pour somme λS.*

Théorème 2.1.1 (Condition nécessaire de convergence). *Si la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est convergente, alors on a $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.*

Remarque 2.1.1. En pratique, c'est la forme négative du théorème qui est la plus utile :
Si la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ diverge.

Exemple 2.1.3. Si $x_n = (-1)^n$, alors la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ diverge. Mais on peut voir cela d'une autre manière car on a $S_{2n} = 1$ et $S_{2n+1} = 0$ et donc la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ diverge.

Remarque 2.1.2. La réciproque du théorème précédent est fausse. Il existe des séries divergentes dont le terme général tend vers 0. Par exemple, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente et pourtant on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Théorème 2.1.2. *La nature d'une série ne change pas si l'on modifie un nombre fini de termes.*

2.2 Critère de Cauchy ; convergence absolue

Théorème 2.2.1 (Critère de Cauchy)**.** *La série* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *est convergente si, et seulement, si elle vérifie la condition :*
Pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $p > q \geq N$*, on ait* $\left|\sum_{n=q+1}^{p} x_n\right| < \varepsilon$.

Définition 2.2.1. La série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum_{n\geq 0} |x_n|$ est convergente.

Théorème 2.2.2. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Remarque 2.2.1. La réciproque du théorème précédent est fausse. On verra que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, alors on sait déjà que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

2.3 Séries à termes positifs

Théorème 2.3.1. *Soit* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *une série à termes positifs, c'est-à-dire* $0 \leq x_n$*, pour tout* $n \geq 0$ *(ou* $n \geq n_0$*). Alors la série* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *converge si et seulement si la suite des sommes partielles* $(S_n)_{n\geq 0}$ *est majorée. Dans ce cas, on a* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sup_{n\geq 0} S_n$.

Remarque 2.3.1. Soit $\sum_{n\geq 0} x_n$ une série à termes positifs. Si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$ n'est pas majorée, alors on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Théorème 2.3.2 (Critère de comparaison)**.** *Soient* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *des séries telles que* $0 \leq x_n \leq y_n$ *à partir d'un certain rang* n_0*.*

1. *Si* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *converge, alors* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *converge.*
2. *Si* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *diverge, alors* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *diverge.*

Corollaire 2.3.1. *Soient* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *deux séries à termes positifs. S'il existe* $a > 0$ *et* $b > 0$ *tels que, pour tout* $n \geq n_0$*, on ait* $ax_n \leq y_n \leq bx_n$*, alors* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *sont de même nature.*

Corollaire 2.3.2. *Soient* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *deux séries à termes positifs.*

1. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$*, alors on a :*
   - *(i) Si* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *converge,* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *converge.*
   - *(ii) Si* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *diverge,* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *diverge.*
2. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = c$*, avec* $c > 0$*, alors les séries* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *sont de même nature.*
3. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$*, alors on a :*
   - *(α) Si* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *diverge,* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *diverge.*
   - *(β) Si* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *converge,* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *converge.*

Théorème 2.3.3. *Soient* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *deux séries à termes strictement positifs telles que à partir d'un certain rang* n_0*, on ait* $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$.

1. *Si* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *converge, alors* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *converge.*
2. *Si* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *diverge, alors* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *diverge.*

Théorème 2.3.4 (Règle de Cauchy). *Soit* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *une série à termes positifs.*

1. *S'il existe* K*, avec* $0 \leq K < 1$*, tel que, à partir d'un certain rang* n_0*, on ait* $\sqrt[n]{x_n} \leq k < 1$*, alors la série* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *converge.*
2. *Si, à partir d'un certain rang* n_0*, on a* $\sqrt[n]{x_n} \geq 1$*, alors la série* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *diverge.*

Corollaire 2.3.3. *Soit* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *une série à termes positifs.*

1. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$*, avec* $\ell < 1$*, alors la série* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *converge.*
2. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$*, avec* $\ell > 1$*, alors la série* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *diverge.*
3. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$*, on ne peut pas conclure.*

Remarque 2.3.2. Donnons deux exemples de séries de nature différentes telles que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} = 1$.

1. Soit $x_n = \dfrac{1}{n}$. On a $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$ et on a déjà vu que la série $\sum_{n\geq 1} x_n$ diverge.
2. Soit $x_n = \dfrac{1}{n^2}$. On a $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$. Comme on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$, où $y_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, alors les deux séries $\sum_{n\geq 0} x_n$ et $\sum_{n\geq 0} y_n$ sont de même nature. Or on a déjà vu que $\sum_{n\geq 0} y_n$ converge, donc $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge.

Théorème 2.3.5 (Règle de d'Alembert). *Soit* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *une série à termes strictement positifs.*

1. *S'il existe* K*, avec* $0 < K < 1$*, tel que, à partir d'un certain rang* n_0*, on ait* $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leq k < 1$*, alors la série* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *est convergente.*

2. *Si, à partir d'un certain rang n_0, on a* $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, *alors la série* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *est divergente.*

Corollaire 2.3.4. *Soit* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *une série à termes positifs.*

1. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$, *avec* $\ell < 1$, *alors la série* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *converge.*
2. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$, *avec* $\ell > 1$, *alors la série* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *diverge.*
3. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, *on ne peut pas conclure.*

Définition 2.3.1. On appelle série de **Riemann** une série de la forme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$.

Proposition 2.3.1. *La série de Riemann* $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$ *est convergente si, et seulement si,* $\alpha > 1$.

2.4 Multiplication des séries absolument convergentes

Théorème 2.4.1. *Soient* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *deux séries absolument convergentes, de sommes respectives* S *et* T. *La série produit de terme général*

$$w_n = x_0y_n + x_1y_{n-1} + \cdots + x_ny_0$$

est absolument convergnte et a pour somme ST.

2.5 Séries semi-convergentes

Définition 2.5.1. Une série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est dite **semi-convergente**, si elle est convergente sans être absolument convergente.

Définition 2.5.2. Une série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est dite **alternée**, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n et x_{n+1} sont de signe contraire. Si on a $x_0 > 0$, le terme général de série s'écrit alors sous la forme $(-1)^n|x_n|$.

Théorème 2.5.1 (Critère des séries alternées). *Pour qu'une série alternée* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *soit convergente, il suffit que la suite* $(|x_n|)_{n\geq 0}$ *tende vers* 0 *en décroissant. Dans ce cas, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *le reste* R_n *est du signe de* x_{n+1} *et on a* $|R_n| \leq |x_{n+1}|$.

Exemple 2.5.1. La série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{n}$ est alternée convergente.

Théorème 2.5.2 (Abel)**.** *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x_n$ *une série. On suppose que :*

1. $(a_n)_{n\geq 0}$ *est une suite de termes positifs, décroissante et tendant vers* 0.
2. *Il existe une constante* $M > 0$ *telle que, pour tout* $n, m \in \mathbb{N}$, *on ait* $\left|\sum\limits_{p=n}^{m} x_p\right| \leq M$.

Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x_n$ *est convergente.*

Remarque 2.5.1. Le critère des séries alternées peut se déduire du théorème d'Abel.

Exemple 2.5.2. Étudier la nature des séries $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \cos(nx)$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \sin(nx)$, où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de termes positifs, décroissante et tendant vers 0.
Pour $x \neq 2k\pi$, on a $\sum\limits_{p=n}^{m} e^{ipx} = \dfrac{e^{inx} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$, d'où $\left|\sum\limits_{p=n}^{m} e^{ipx}\right| \leq \dfrac{2}{|1 - e^{ix}|}$. Par conséquent, on a $\left|\sum\limits_{p=n}^{m} \cos(px)\right| \leq \dfrac{2}{|1 - e^{ix}|}$ et $\left|\sum\limits_{p=n}^{m} \sin(px)\right| \leq \dfrac{2}{|1 - e^{ix}|}$. Comme on a $\sin(2k\pi) = 0$, on en conclut que :

1. $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \cos(nx)$ converge pour tout $x \neq 2k\pi$.
2. $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \sin(nx)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2.6 Exercices

1. Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ où :
$u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$, $u_n = \ln(1+\frac{1}{n})$, $u_n = \ln(1+\frac{1}{n^2})$, $u_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$, $u_n = \dfrac{n!}{e^n}$,
$u_n = \dfrac{n!}{n^n}$,
$u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^3+5n^2}$, $u_n = \dfrac{\ln(n)}{5^n}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$, $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^3+3n^2-1}$,
$u_n = \dfrac{\ln(n^2+n+1)}{\ln(n^2+n-1)}$, $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n^2-1)} - 1$, $u_n = \ln\left(\dfrac{2+\sin(\frac{1}{n})}{2-\sin(\frac{1}{n})}\right)$,
$u_n = \dfrac{\ln(n)}{\ln(e^n-1)}$,
$u_n = \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$, $u_n = \dfrac{\pi^n}{1+(3.14)^n}$, $u_n = n^{1/n}-1$, $u_n = \dfrac{1}{n^2+\sin(n^2)}$,
$u_n = e^{-\sqrt{2+n}}$,
$u_n = \dfrac{3^n+5}{4^n+n^2}$, $u_n = (1+\frac{a}{n})^n - \frac{n}{n+1}e^a$, $u_n = n^{-(1+1/n)}$, $u_n = \left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n\sqrt{n}}$
$u_n = \dfrac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$, $u_n = \ln(n)^{-\sqrt{n}}$, $u_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha}\ln\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)$,
$u_n = \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\alpha}$,
$u_n = (n+1)^{1/n} - (n-1)^{1/n}$, $u_n = n^{-\ln(\ln(n))}$, $u_n = \dfrac{a^{\sqrt{n}}}{n^{\alpha}}$, $u_n = \dfrac{a^n}{n+b^n}$,

2. Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature de la série $\sum u_n$. Si la série est convergente, calculer sa somme.

$u_n = \cos(n\pi)$, $u_n = \sin(n\pi)$, $u_n = \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$, $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$,
$u_n = \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$, $u_n = \dfrac{1}{n^2-1}$, $u_n = \dfrac{2n-1}{n^3-4n}$, $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$, $u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
$u_n = (n+1)3^{-n}$, $u_n = \sin^n\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$,
$u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$
$u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $u_n = \text{Arctan}\dfrac{1}{1+n+n^2}$, $u_n = \ln(1-\dfrac{1}{n^2})$
$u_n = \dfrac{2}{n(n^2-1)}$, $u_n = \dfrac{(\alpha n^2+\beta n+\gamma)}{n!}a^n$ pour $a \in \mathbb{R}$, $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$.

3. Etudier la nature des séries suivantes de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$, b) $u_n = (-1)^n \tan(\frac{1}{n})$, c) $u_n = (-1)^n \ln(n)$, d) $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$,
e) $u_n = \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, f) $u_n = (-1)^n \left(\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} - \dfrac{1}{e}\right)$,g) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}\ln(n) - n^{1/3}}{n^2+1}$
$u_n = n^{(-1)^n/n} - 1$, i) $u_n = (-1)^n n^{1/n} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, j) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$, k) $u_n = \dfrac{(-1)^{n^2+4n+1}}{n^2+4n+1}$.

4. Étudier la convergence des séries :

$$\sum \frac{2n^2-1}{4n^4}, \qquad \sum \frac{3n^4-3n^2+1}{n^5}, \qquad \sum \frac{n^2+1}{(n^2-1)^2}\,.$$

5. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n}{(n^2-1)^2} = \frac{5}{4}\,.$$

(On décomposera les fractions rationnelles en éléments simples).

6. Calculer les sommes des séries de termes généraux :

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad v_n = \ln\cos\frac{x}{2^n}, \quad w_n = \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}, \quad x_n = \frac{n^3}{n!};$$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}; \qquad z_n = \arctan\frac{1}{n^2+n+1}\,.$$

7. Étudier la convergence absolue des séries suivantes :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}; \qquad \frac{(-1)^n}{n^{3/2}+1}; \qquad \frac{n!x^n}{n^n}; \qquad \frac{n^{n+1}x^n}{n!}; \qquad \frac{x^n}{n!}.$$

Chapitre 3

SÉRIES DE FOURIER

3.1 Séries trigonométriques

Définition 3.1.1. On appelle **série trigonométrique** (forme réelle) toute série de fonctions de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$$

où les a_n, $n \geq 0$, b_n, $n \geq 1$, sont des nombres réels ou complexes appelés **coefficients** de la série trigonométrique.
On appelle **série trigonométrique** (forme complexe) toute série de fonctions de la forme

$$c_0 + \sum_{n\geq 1} \big(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\big)$$

où les c_n, $n \geq 0$, sont des nombres réels ou complexes appelés **coefficients** de la série trigonométrique.

Théorème 3.1.1. *Si les séries* $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ *et* $\sum_{n\geq 1} |b_n|$ *sont convergentes alors la série trigonométrique* $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$ *est normalement convergente sur* $\mathbb{R}$.
De même, si les $\sum_{n\geq 0} |c_n|$ *et* $\sum_{n\geq 1} |c_{-n}|$ *sont convergentes, la série trigonométrique* $c_0 + \sum_{n\geq 1} \big(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\big)$ *est normalement convergente sur* $\mathbb{R}$.

Théorème 3.1.2 (calcul des coefficients). *Soit* $c_0 + \sum_{n\geq 1} \big(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\big)$ *une série trigonométrique uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$*, de somme* f*. On a pour* *tout* $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt\,.$$

De même, si la série trigonométrique $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big)$ *est uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$ *de somme* f*, on a*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \quad \textit{pour}\; n \geq 0\,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \quad \textit{pour}\; n \geq 1\,.$$

3.2 Séries de Fourier

Définition 3.2.1. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite **périodique**, s'il existe un réel $T > 0$ tel que

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,.$$

Tout réel $T > 0$ vérifiant l'égalité précédente est appelé une **période** pour f et on qualifie, aussi, f de fonction T-**périodique**.

Définition 3.2.2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, continue par morceaux. On appelle **coefficients de Fourier** de f, les nombres

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

dans la présentation complexe, et les nombres

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt\,, \quad n \geq 0\,; \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt\,, \quad n \geq 1\,,$$

dans la présentation réelle.
On appelle **série de Fourier** de f la série trigonométrique

$$c_0(f) + \sum_{n\geq 1}\big(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}\big) \quad \text{(forme complexe)}$$

ou la série trigonométrique

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1}\big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\big) \quad \text{(forme réelle)}\,.$$

Théorème 3.2.1 (formule de Parseval). *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. On a*

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n\geq 1} \Big(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \Big) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt \,,$$

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n\geq 1} \Big(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \Big) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt \,.$$

Corollaire 3.2.1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue. Si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls, alors f est identiquement nulle.*

Théorème 3.2.2 (convergence normale). *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique , continue et C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est f.*

Théorème 3.2.3 (Dirichlet). *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Big(f(x+0) + f(x-0) \Big) &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n(f) e^{inx} + c_{-n}(f) e^{-inx} \right) \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} \left(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx) \right). \end{aligned}$$

3.3 Exercices

1. (a) Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = |x|$.

   (b) En déduire $A = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, $B = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

2. (a) Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique impaire définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$.

   (b) En déduire $A = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, $B = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

3. (a) Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique paire définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(x) = x^2$.

(b) En déduire $A = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, $B = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, $C = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $D = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$ et $E = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

4. (a) Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi[$ par $f(x) = |\sin(x)|$.

   (b) En déduire $A = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$.

5. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in]0,\, 2\pi[\\ \pi & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

6. Soit f de période 2π telle que $f(x) = x(\pi + x)$ sur $]-\pi,\pi[$.

   (a) Former le développement en série de Fourier trigonométrique de f ainsi que la formule de Parseval pour f. En déduire $A = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $B = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $C = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

   (b) Déduire le développement de F de période 2π telle que $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. En déduire $C = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6}$.

7. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f de période 2π telle que $f(x) = cos(\frac{x}{2}) + sin(\frac{x}{2})$ sur $]-\pi,\, \pi[$. En déduire la valeur de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$.

8. On considère la fonction f définie sur R par $f(t) = |\cos(t)|^3$.

   (a) Montrer que la fonction f est paire et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

   (b) On considère les coefficients de Fourier de f

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\, dt$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\, dt\,.$$

   Montrer que $b_n = 0$ pour tout $n \geq 0$, et que $a_n = 0$ si n est impair.

(c) (i) Déterminer deux nombres réels A et B tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $(\cos(t))^3 = A\cos(t) + B\cos(3t)$.

(ii) En déduire a_n lorsque n est pair.

(ii) Vérifier que $\dfrac{p^4}{a_{2p}}$ tend vers $\dfrac{3}{2\pi}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(d) Ecrire la série de Fourrier de f. Montrer sa convergence simple sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa somme.

(e) Etudier la convergence uniforme de la série de Fourrier de f.

9. Soit f la fonction paire 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [\frac{\pi}{4}, \pi] \end{cases}$$

(a) La série de Fourier f converge-t-elle uniformément vers f sur $[-\pi, \pi]$? Pourquoi ?

(b) Donner $\sin(\dfrac{n\pi}{4})$ et $\cos(\dfrac{n\pi}{4})$ en fonction de n (modulo 8).

(c) Déterminer la série de Fourier de f et calculer sa somme.

(d) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$.