Université d'Orléans
Département de Mathématiques
L4MT12

17 Janvier 2017

Feuille TD n°1 : suites, limites

1-. On considère les suites $u_n = (n+1)^{1/2}$ et $v_n = -n^{1/2}$. Sont-elles convergentes ? Leurs somme sont-elles convergentes ?

2-. Trouver les limites des suites $u_n = 1/(1+n)$ et $v_n = 2n$, ainsi que de leur somme et de leur produit.

3-. Étudier la suite $u_n = x^n$, avec x réel (pour $x > 1$, poser $x = 1 + a$, et montrer que $(1+a)^n > 1 + na$).

4-. Étudier les suites récurrentes suivantes : $u_{n+1} = (4u_n - 2)/(u_n + 3)$, $u_1 = 3$; $u_{n+1} = (5u_n - 3)/(u_n + 1)$, $u_1 = 2$.

5-. Montrer que $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

6-. Trouver la limite, si elle existe, de $f(x) = [(1+x)^n - 1]$, n étant un entier naturel fixé (comparer $(1+x)^n$ et $1+nx$).

7-. Étudier les limites suivantes :

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}\\
&b) \quad \lim_{x\to 1} (x+7)^{1/3}\\
&c) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x^2+1)}{x^2+x+1}\\
&d) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x-1)}{x-1}
\end{aligned}
$$

8-. Montrer géométriquement, en comparant $\sin x$, $\tan x$ et x, que, lorsque l'angle x est exprimé en radians, la limite de $(\sin x)/x$ quand x tend vers 0 est égale à 1.

9-. On pose $f(x) = (1+1/x)^{1/x}$.

a) Quel est le domaine de définition de f ?

b) Quelles sont les limites, si elles existent, de $\ln f(x)$ quand x tend vers $\pm\infty$.

c) Quelles sont les limites, si elles existent, de $f(x)$ quand x tend vers $\pm\infty$.

d) Calculer la dérivée $f'(x)$.

10-. Calculer les limites suivantes (en utilisant par exemple la rêgle de l'Hôpital)

$$
\begin{array}{ll}
a) & \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} \\
b) & \lim_{x\to 1} \dfrac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1} \\
c) & \lim_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 2x}
\end{array}
$$

11-. Calculer les limites suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
a) & \lim_{x\to 2} \dfrac{\ln(2x-3)}{x^2-4} \\
b) & \lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}
\end{array}
$$

12-. Etudier la suite récurrente suivante :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n+2}{u_n+3}.$$

Discuter la convergence de cette suite suivant la valeur de u_0.

13-. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = a \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}.$$

a) Montrer que l'on a, quels que soient $a \in \mathbf{R}$ et $n \geq 1$, $|u_n| \leq 1$.

b) Montrer que la suite (u_n) est monotone pour $n \geq 1$. Indiquer suivant les valeurs de a si elle est croissante, décroissante ou constante.

c) Etudier suivant les valeurs de a la convergence de la suite (u_n) et préciser, dans chacun des cas, la valeur de la limite.