Université d'Orléans 08 Février 2017
Département de Mathématiques
L4MT12

Feuille TD n°4 : séries et probabilités

1-. On rappelle que la loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$ est la mesure de probabilité sur $\mathbf{N}$ donnée par

$$P(n) = \frac{\mu^n \exp(-\mu)}{n!}$$

On considère ici une variable aléatoire discrète X distribuée selon cette loi de Poisson : Proba$(X = n) = P(n)$.

a) Montrer qu'on a bien $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$.

b) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.

c) Calculer la variance $\sigma^2(X)$ de X.

d) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) z^n$ converge si $|z| < 1$ et calculer sa somme. Cette somme est appelée fonction génératrice de la variable aléatoire X.

2-. Dans la fabrication de bouteilles en verre, la présence d'impuretés (ou pierres) dans le verre en fusion provoque du rebut : une bouteille qui contient une pierre ou plus est inutilisable. On suppose qu'on a n pierres dans la matière pour faire N bouteilles. On suppose que ces pierres se répartissent de manière équiprobable dans les bouteilles.

a) Quelle est la probabilité W_k de trouver k pierres dans une bouteille ?

b) Montrer que, pour k fixé, W_k tend vers $P_k = \frac{\mu^k \exp(-\mu)}{k!}$ quand N tend vers l'infini et que la proportion de pierres $n/N = \mu$ reste constante.

c) Donner une estimation du pourcentage de rebut s'il y a environ 30 pierres pour 100 bouteilles.