Université d'Orléans
Département de Mathématiques
L4MT12

28 Février 2017

Feuille TD n°5 : suites et séries de fonctions

1-. On définit la fonction $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$ sur $\mathbf{R}_+$.

a) Montrer que f_n converge simplement vers 0 sur $\mathbf{R}_+$.

b) Montrer que f_n ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbf{R}_+$.

2-. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

a) Déterminer son rayon de convergence.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$ pour $|x| < 1$.

c) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ (c'est plus difficile).

3-. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(*) \qquad y + y'' = 0$$

a) On cherche une solution de la forme $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. En supposant qu'une telle solution existe, donner une relation de recurrence d'ordre 2 satisfaite par la suite (a_n).

b) Donner la solution générale (a_n) de la relation de récurrence.

c) Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

d) Montrer que la somme $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de cette série entière est solution de l'équation différentielle $(*)$.