Université d'Orléans
Département de Mathématiques
4 Avril 2017
L4MT12

Controle 2

Exercice 1

Dans cet exercice, n, x, y, z sont des entiers naturels variables, p est un nombre réel fixé compris entre 0 et 1, λ est un nombre réel fixé.

1. Donner l'expression de la loi binomiale $\mathcal{B}_n(p)$.

2. Donner l'expression de la loi de Poisson de paramètre λ.

Un élément chimique émet Y électrons pendant une période T. Chaque électron a une probabilité p d'avoir un effet biologique (on dira qu'il est efficace). Soit Z le nombre d'électrons efficaces émis pendant une période T.

3. On suppose que $Y = y$ est connu. Donner la probabilité $P(Z = z|Y = y)$ que Z soit alors égal à z.

4. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ. Donner la probabilité du couple (Z, Y), c'est-à-dire la probabilité que $Z = z$ et $Y = y$. Elle se calcule par la formule $P(Z = z, Y = y) = P(Z = z|Y = y)P(Y = y)$.

5. Montrer que Z suit une loi de Poisson dont on donnera le paramètre en calculant $P(Z = z) = \sum_{y=z}^{\infty} P(Z = z, Y = y)$.

6. Soit $X = Y - Z$ le nombre d'électrons émis non efficaces. Donner la probabilité $P(X = x, Z = z)$.

7. Montrer que X suit une loi de Poisson dont on donnera le paramètre en calculant $P(X = x) = \sum_{z=0}^{\infty} P(X = x, Z = z)$.

Exercice 2

1. Déterminer le centre, le rayon de convergence et le domaine de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{n!}(2x-3)^n$. (Indication : on pourra poser $u = 2x - 3$).

2. Développer en série entière en $x_0 = 0$ la fonction $\dfrac{1}{1+x^2}$ et donner son domaine de convergence.

3. En déduire le développement en série entière en $x_0 = 0$ de la fonction $\arctan x$ et son rayon de convergence. (Indication : $\arctan x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$).

Exercice 3

Soit f la fonction paire 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0, \pi/4] \\ 0 & \text{si} \quad x \in]\pi/4, \pi[\end{cases}$$

1. Expliquer en citant un théorème du cours pourquoi la série de Fourier de f ne converge pas uniformément vers f sur $[-\pi, \pi]$.

2. Exprimer $\sin(n\pi/4)$ et $\cos(n\pi/4)$ en fonction de n modulo 8.

3. Calculer la série de Fourier de f.

4. En utilisant un théorème du cours, donner la somme de cette série en tout point $x \in [-\pi.\pi]$.

5. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$.