Université d'Orléans

SOL4MT12

Examen du 10/05/2017
corrigé succinct

Exercice 1

a) à l'aide d'équivalents :

$$e^{2x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} 2x \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2$$

avec la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2e^{0} = 2$$

b) à l'aide d'équivalents :

$$\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

avec la règle de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{3\cos 3x} = \frac{2}{3}\,\frac{\cos 0}{\cos 0} = \frac{2}{3}$$

Exercice 2

: séries à termes positifs : on utilise des équivalents.

a) $u_n \sim \left(\frac{1}{2}\right)^n$: série géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$ $\Rightarrow \sum u_n$ converge

b) $u_n = \frac{1}{n^2}$: série de Riemann $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ $\Rightarrow \sum u_n$ converge

c) $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$: série de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ $\Rightarrow \sum u_n$ diverge

d) $u_n \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow \sum u_n$ converge

e) $u_n \sim \frac{1}{n}$ $\Rightarrow \sum u_n$ diverge

f) On utilise le critère de d'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \frac{2^n}{2^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \times \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

Exercice 3 séries alternées

a) $|u_n| = \frac{1}{1+\ln n} \sim \frac{1}{\ln n}$. Or $\frac{1}{\ln n} \geqslant \frac{1}{n}$ $\Rightarrow \sum |u_n|$ diverge

la série n'est pas absolument convergente.

$a_n = \frac{1}{1+\ln n}$ décroît et tend vers 0

D'après le théorème d'Abel, $\sum (-1)^n a_n$ converge : la série est semi-convergente

b) Comme $\frac{n^2-1}{n^2+1} \to 1$, le terme général $u_n = (-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1}$ ne tend pas vers 0 $\Rightarrow$ la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 4 séries entières

a) série en x^{2n} : le centre est 0

On applique d'Alembert avec $u_n = \frac{|x|^{2n}}{\sqrt{n+1}}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|^{2n+2}}{|x|^{2n}} \times \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = |x|^2 \times \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \to |x|^2$$

La série converge si $|x|<1$ et diverge si $|x|>1$, donc $R=1$

Le domaine de convergence est l'intervalle $]-1,1[$

b) série en u^n où $u = 2x-3$; le centre est $\frac{3}{2}$

$\sum n^3 u^n$ a pour rayon de convergence $R=1$

car $\frac{(n+1)^3}{n^3} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \to 1$

convergence ssi $-1<u<1 \iff 1<x<2$

c) série en x^n ; le centre est 0

Soit $a_n = \frac{1+5^n}{n!}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+5^{n+1}}{1+5^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} \sim 5 \times \frac{1}{n+1}$

Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$ et $R = \frac{1}{0} = +\infty$

Le domaine de convergence est $\mathbb{R}$

Exercice 5

a) On sait que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ pour $|x| < 1$

Donc $\frac{x}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$ pour $|x| < 1$

Comme le rayon de convergence de cette série est $R = 1$, on a l'égalité seulement pour $|x| < 1$, cad $-1 < x < 1$

b) On pose $y = x - 1$. Alors

$$f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{1+y}{2+y} = \frac{1+y}{2} \frac{1}{1+\frac{y}{2}}$$

On a $\frac{1}{1+\frac{y}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{y}{2}\right)^n$ pour $\left|\frac{y}{2}\right| < 1$

$$f(x) = \frac{1+y}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} y^n \qquad \text{pour } |y| < 2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} y^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} y^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} y^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} y^n$$

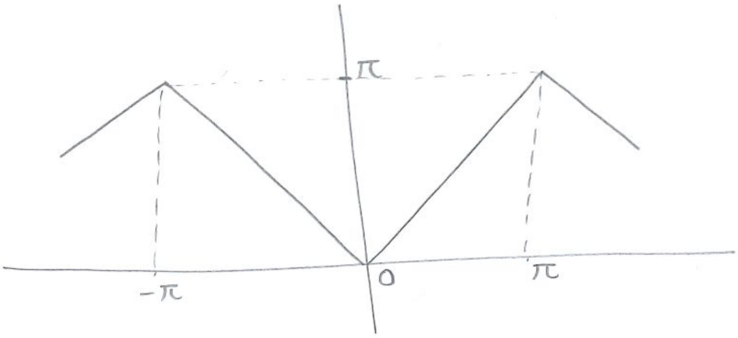
$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}} [-1+2] y^n = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}} y^n$$

D'où

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}} (x-1)^n \qquad \text{pour } |x-1| < 2$$

Le rayon de convergence de cette série est $R = 2$. on a l'égalité seulement pour $|x-1| < 2$, c.a.d $-1 < x < 3$

Exercice 6



a) $T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

f est paire $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \times 2 \times \int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{4}{T}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n \geq 1$$

$$= \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$$

On utilise
$\sin n\pi = 0$
$\cos n\pi = (-1)^n$

On intègre par parties :

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \cos nx\,dx \qquad v = \frac{\sin nx}{n}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{x\sin nx}{n}\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n^2}\left.\cos nx\right|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos n\pi - \cos 0\right] = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

D'où la série de Fourier de f

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos\big((2p+1)x\big)$$

b) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus les dérivées à droite et à gauche $f'(x^+)$ et $f'(x^-)$ existent pour tout $x \in \mathbb{R}$

D'après le théorème de Dirichlet, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos((2p+1)x) \text{ converge vers } \frac{1}{2}\left[f(x^-) + f(x^+)\right] = f(x),$$

c) $\left| \frac{1}{(2p+1)^2} \cos((2p+1)x) \right| \leqslant \frac{1}{(2p+1)^2}$

Or, la série $\sum \frac{1}{(2p+1)^2}$ converge (termes impairs de la serie $\sum \frac{1}{n^2}$)

Donc la série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$,

D'après le cours, cela entraîne la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Comme on sait déjà que f_n converge simplement vers f,

f_n converge uniformément vers f.

d) On prend $x = 0$. La convergence de $f_n(0)$ vers $f(0) = 0$

donne $\displaystyle \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = 0$.

D'où $\displaystyle \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

e) $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$: elle converge. On a

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{(2p+2)^2} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} S = \frac{\pi^2}{8}$$

D'où $S = \dfrac{\pi^2}{6}$