Université d'Orléans
Département de Mathématiques
SOL4MT12

10 Mai 2017

**Examen**

*Calculatrices interdits*

*Les seuls documents autorisés sont les formulaires distribués en cours*

**Exercice 1**

Calculer les limites suivantes (en utilisant par exemple la rêgle de l'Hôpital)

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

**Exercice 2**

Déterminer si la série $\sum u_n$ converge en justifiant votre réponse.

$$\text{a) } u_n = \frac{1}{2^n+1} \qquad \text{b) } u_n = \frac{1}{n^2} \qquad \text{c) } u_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$$

$$\text{d) } u_n = \frac{n+5}{n^3-2n+3} \qquad \text{e) } u_n = \ln(1+\frac{1}{n}) \qquad \text{f) } u_n = \frac{n^5}{2^n}$$

**Exercice 3**

Déterminer si les séries suivantes sont absolument convergentes. Dans le cas où elles ne sont pas absolument convergents, déterminer si elles sont semi-convergentes.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\ln n} \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1}$$

**Exercice 4**

Déterminer le centre, le rayon de convergence et le domaine de convergence des séries suivantes

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n+1}} \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} n^3(2x-3)^n \qquad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{n!} x^n$$

**Exercice 5**

On considère la fonction $f$ définie pour $x \neq -1$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

a) Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (développement en série entière au point 0). Pour quelles valeurs de $x$ a-t-on l'égalité ?

b) Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-1)^n$ (développement en série entière au point 1). Pour quelles valeurs de $x$ a-t-on l'égalité ?

**Exercice 6**

On considère la fonction $f : x \mapsto |x|$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et on la prolonge en une fonction $2\pi$-périodique sur $\mathbf{R}$, qu'on note encore $f$.

a) Calculer la série de Fourier de $f$, qu'on note comme d'habitude

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x$$

Il s'agit donc d'expliciter $\omega$ et les coefficients $a_n$ et $b_n$.

b) Justifier à l'aide d'un résultat du cours que pour tout $x \in \mathbf{R}$, la série de Fourier ci-dessus converge vers $f(x)$.

c) Montrer que cette série converge normalement sur $\mathbf{R}$. En déduire que la série de Fourier de $f$ converge uniformément vers $f$ sur $\mathbf{R}$.

d) Montrer, en choisissant une valeur de $x$ appropriée, l'égalité

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

e) Justifier que la série de terme général $u_n = 1/n^2$ converge. Soit $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sa somme. Montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4} S = S$. En déduire que $S = \dfrac{\pi^2}{6}$.