Université d'Orléans
Département de Mathématiques
28 Mars 2017
L4MT12

Formulaire sur les séries de Fourier

1-. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, continue par morceaux et périodique de période T. On pose $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. On définit sa série de Fourier comme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \qquad SF(f)$$

où les coefficients de Fourier sont donnés par

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x) \cos n\omega x \, dx; \quad b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x) \sin n\omega x \, dx$$

où $a \in \mathbf{R}$ est arbitraire.
Si f est paire sur $[-T/2, T/2]$, $b_n = 0$ pour tout n. Si f est impaire sur $[-T/2, T/2]$, $a_n = 0$ pour tout n.

On note

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x$$

la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier $SF(f)$.

2-. **Théorème (convergence quadratique)**. Soit f comme ci-dessus. Alors,
(i) $\int_a^{a+T} |f(x) - f_n(x)|^2 dx \to 0$ quand $n \to \infty$.
(ii) (égalité de Parseval)

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = (\frac{a_0}{2})^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

3-. **Théorème de Dirichlet**. Soit f comme ci-dessus. Alors,
(i) En tout point x où f est dérivable, $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$.
(ii) En tout point x où $f'(x^-)$ et $f'(x^+)$ existent, $f_n(x) \to \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$ quand $n \to \infty$.