

Les choses à connaître...

Le polycopié est court (54 pages) ; je conseille de le connaître dans sa totalité en dégageant par vous-mêmes les notions essentielles. Ce qui suit n'est qu'un guide. Pour bien assimiler les notions essentielles, il est indispensable de faire des exercices mettant en jeu ces notions. Les feuilles de TD proposent de tels exercices ; il faut donc voir ou revoir activement ces exercices en même temps que vous révisez le cours.

1. Le dual d'un espace vectoriel.

Qu'est-ce qu'une forme linéaire φ sur un espace vectoriel E sur un corps K ?

Quel lien existe-t-il entre formes linéaires et hyperplans ?

Comment calculer la dimension d'un sous-espace vectoriel défini comme intersection d'hyperplans ?

On définit le dual de E comme l'espace vectoriel

$$E^* = L(E, K) = \{\text{formes linéaires sur } E\}$$

Qu'est-ce que la base duale \mathcal{B}^* d'une base \mathcal{B} d'un espace vectoriel E de dimension finie ?

Etant donnée une base \mathcal{B}' de E^* , comment calcule-t-on la base \mathcal{B} de E telle que $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'$?

Définir l'application transposée ${}^t u \in L(F^*, E^*)$ de $u \in L(E, F)$. Etant données des bases \mathcal{B} de E et \mathcal{C} de F , quelle relation existe-t-il entre $Mat_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(u)$ et $Mat_{\mathcal{B}^*, \mathcal{C}^*}({}^t u)$?

2. Les formes quadratiques.

Qu'est-ce qu'une forme bilinéaire f sur un espace vectoriel E sur un corps K ?

Qu'est-ce qu'une forme quadratique q sur un espace vectoriel E sur un corps K ?

Qu'est-ce que sa forme polaire ?

Comment définit-on la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(q)$ de q dans la base \mathcal{B} de E ? Quelle relation existe-t-il entre les matrices A et A' de q associées à deux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de E ?

Quand dit-on que la forme quadratique q est non-dégénérée ? définie positive ?

Qu'est-ce qu'une base q -orthogonale ? Comment calcule-t-on une base q -orthogonale ?

Savoir appliquer la méthode de Gauss.

Que dit le théorème de Sylvester sur les formes quadratiques réelles ? Qu'est-ce que la signature d'une forme quadratique réelle ?

3. Espaces vectoriels euclidiens.

Donner la définition d'un produit scalaire sur un espace vectoriel réel. Qu'est-ce qu'un espace vectoriel euclidien ?

Connaître les propriétés du produit scalaire et de la norme euclidienne : inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski, identité du parallélogramme, théorème de Pythagore.

Savoir appliquer le procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

Savoir calculer la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien.

Qu'est-ce que le supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel ?

Définir l'application adjointe $u^* \in L(F, E)$ de $u \in L(E, F)$ où E et F sont des espaces vectoriels euclidiens. Connaître ses propriétés.

Qu'est-ce qu'un endomorphisme symétrique ? Que pouvez-vous dire sur la diagonalisation des endomorphismes symétriques ?

Qu'est-ce qu'un endomorphisme orthogonal ? Donner la classification des endomorphismes orthogonaux en dimension 2 et 3.

4. Quelques applications.

4.1. Endomorphismes symétriques et formes quadratiques.

Quel lien existe-t-il entre les endomorphismes symétriques et les formes quadratiques sur un espace vectoriel euclidien ? Comment ce lien peut-il être utilisé pour étudier une forme quadratique ?

4.2. Polynômes orthogonaux.

Connaître la définition de la suite de polynômes orthogonaux associée à un poids sur un intervalle.

4.3. Coniques et quadriques.

Connaître leurs définitions.

Savoir identifier la nature et déterminer les éléments géométriques d'une conique ou d'une quadrique définie par une équation.