

Feuille d'exercices n^0 1

Exercice 1

On note $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ la base canonique de \mathbf{R}^3 . Déterminer si les familles de vecteurs de \mathbf{R}^3 sont des bases. Si oui, déterminer la base duale.

- a) $(\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$
- b) $(\mathbf{f}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{k}, \mathbf{f}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{f}_3 = \mathbf{j} + \mathbf{k})$

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur K et $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_i)_{i \in I}$, où I est un ensemble d'indices, une base de E .

- a) Montrer que si $(\alpha_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments non nuls de K , alors $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_i = \alpha_i \mathbf{e}_i)_{i \in I}$ est une base de E .
- b) Quelle relation lie $\mathbf{e}'_i{}^*$ et $\mathbf{e}_i{}^*$?

Exercice 3

Etant donné $A \in M_n(K)$, on note $\text{Trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ sa trace.

- a) Montrer que Trace est une forme linéaire sur $M_n(K)$.
- b) Montrer que l'application $A \in M_n(K) \mapsto \varphi_A$, où $\varphi_A(M) = \text{Trace}(AM)$, est un isomorphisme linéaire de $M_n(K)$ sur son dual $M_n(K)^*$

Exercice 4

Soit $E = \mathbf{R}_n[K]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Soit (a_0, \dots, a_n) un $(n+1)-$ uple de scalaires deux à deux distincts. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)-$ uple (c_0, \dots, c_n) de scalaires tels que pour tout $P \in E$,

$$\int_0^1 P(x)dx = c_0P(a_0) + \dots + c_nP(a_n).$$

Exercice 5

On considère $E = \mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et les formes linéaires sur E définies par :

$$\varphi_1(P) = P(1), \varphi_2(P) = P(-1), \varphi_3(P) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(t)dt, \varphi_4(P) = \int_{-1}^1 tP'(t)dt.$$

On pose $F = \text{Ker}(\varphi_1) \cap \text{Ker}(\varphi_2) \cap \text{Ker}(\varphi_3) \cap \text{Ker}(\varphi_4)$.

- 1) Montrer que $P_0 = X^3 - X$ appartient à F .
- 2) En déduire que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ n'est pas libre.
- 3) Déterminer les coordonnées de chaque φ_i dans la base $\mathcal{B}^* = (e_0^*, e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ duale de \mathcal{B} .
- 4) Déterminer la dimension de F , puis une base de F .

Exercice 6

Soient φ_1, φ_2 et φ_3 les formes linéaires sur \mathbf{R}^3 définies par

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) &= 2x + 4y + z \\ \varphi_2(x, y, z) &= -x + 2y + 3z \\ \varphi_3(x, y, z) &= x + y \end{cases}$$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbf{R}^3)^*$. Déterminer la base \mathcal{B} dont elle est la base duale.

Exercice 7

Déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels de \mathbf{R}^4 définis ci-dessous, puis en donner une base.

- a) $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x + 2y - z = 0\}$;
- b) $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x + 2y - z = x + y - z - t = 0\}$;
- c) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x + 2y - z = x + y - z - t = 3x + 4y - 3z - 2t = 0\}$;
- d) $D = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x + 2y - z = x + y - z - t = x - y + z - t = 0\}$.

Exercice 8

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, $k \in \mathbf{N}^*$ et $f \in L(E)$ tels que $f^k = Id_E$.

- 1) On suppose que $K = \mathbf{C}$. Montrer que f est diagonalisable.
- 2) On suppose que $K = \mathbf{R}$. Montrer que f est diagonalisable si $k = 1$ ou si $k = 2$ mais n'est pas nécessairement diagonalisable si $k \geq 3$.

Exercice 9

Soit $E = \mathbf{R}[X]$.

- 1) On définit $D \in L(E)$ par $D(P) = P'$ et $\varphi \in E^*$ par $\varphi(P) = \int_0^1 P(t)dt$. Calculer ${}^t D(\varphi)$.
- 2) On définit $u \in L(E)$ par $u(P) = XP'$ et $\psi \in E^*$ par $\psi(P) = P'(0)$. Calculer ${}^t u(\psi)$.

Exercice 10

Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On considère sa base canonique $\mathcal{B} = (\epsilon_0 = 1, \epsilon_1 = X, \epsilon_2 = X^2)$ et la base duale $\mathcal{B}^* = (\epsilon_0^*, \epsilon_1^*, \epsilon_2^*)$.

On note D l'endomorphisme de E qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivée P' .

- 1) Déterminer la matrice de D relativement à la base \mathcal{B} .
- 2) Déterminer la matrice de ${}^t D$ relativement à la base \mathcal{B}^* .

Exercice 11

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe $\lambda \in K$ tel que $u = \lambda Id_E$ (c'est-à-dire u est une homothétie).
- (ii) Toute droite (vectorielle) D de E est stable par u (c'est-à-dire $u(D) \subset D$).
- (iii) Tout hyperplan (vectoriel) H de E est stable par u (c'est-à-dire $u(H) \subset H$).

Exercice 12

Dans $E = M_n(\mathbf{R})$, on considère la matrice A dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la ligne n qui valent -1 .

- 1) Décomposer A dans la base canonique (E_{ij}) de $M_n(\mathbf{R})$.
- 2) Donner la décomposition de $B = {}^t A$ dans cette même base.
- 3) Déterminer les produits AB et BA .