

Feuille d'exercices n^0 3

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel réel. Déterminer parmi les applications de $E \times E$ dans \mathbf{R} suivantes celles qui sont des produits scalaires :

- (i) $E = \mathbf{R}^2$, $((x, y), (x', y')) \mapsto xx' + 2xy' + 2yx' + 5yy'$;
- (ii) $E = \mathbf{R}^2$, $((x, y), (x', y')) \mapsto xx' + 2xy' + 2yx' + yy'$;
- (iii) $E = \mathbf{R}_2[X]$, $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^2 P(k)Q(k)$;
- (iv) $E = M_n(\mathbf{R})$, $(M, N) \mapsto \text{Trace}(MN)$;

Exercice 2

Soient E un espace préhilbertien réel et $x, y \in E$.

- a) Calculer $\|\|x\|^2y - <x, y>x\|^2$.
- b) Retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les cas d'égalités.

Exercice 3

Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[a, b]$. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(t)dt \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \right) \geq (b-a)^2.$$

Etudier les cas d'égalités.

Exercice 4

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et a_1, \dots, a_n des réels strictement positifs de somme égale à 1.

- a) Montrer que : $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq n^2$.
- b) Etudier les cas d'égalités.

Exercice 5

Soient E un espace euclidien et $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de E de norme 1. On suppose qu'il existe $x \in E$ de norme 1 tel que $\|\frac{x+x_n}{2}\|$ tende vers 1 quand n tend vers l'infini. Montrer que (x_n) tend vers x .

Exercice 6

Dans \mathbf{R}^4 muni du produit scalaire usuel et de la base canonique \mathcal{B} , on considère $v_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $v_2 = (0, 3, 1, -1)$ et $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

Déterminer une base orthogonale et un système d'équations de F^\perp .

Exercice 7

Soit E un espace euclidien. Montrer que pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E on a :

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Exercice 8

Dans \mathbf{R}^4 muni du produit scalaire usuel et de la base canonique \mathcal{B} , on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{x \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}.$$

Déterminer la matrice, relativement à \mathcal{B} , de la projection orthogonale sur F et de la symétrie orthogonale par rapport à F .

Exercice 9

Soit $E = C([0, \pi], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt.$$

On considère les fonctions $g, h, i \in E$ définies par

$$g(t) = \sin t, \quad h(t) = \cos t, \quad i(t) = t.$$

On pose $F = \text{Vect}(h, g)$.

a) Déterminer la projection orthogonale de i sur F .

b) En déduire la valeur de : $\inf_{(a,b) \in \mathbf{R}^2} \int_0^\pi (a \sin t + b \cos t - t)^2 dt$.

Exercice 10

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $E = \mathbf{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un et un seul $Q \in E$ tel que pour tout $P \in E$ on ait

$$P'(1) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$