

Feuille d'exercices n^0 3

Exercice 1

Soit H un sous-groupe d'un groupe G .

- 1) Montrer que H est distingué si et seulement si pour tout $g \in G$, les ensembles gH et Hg coïncident.
- 2) Montrer que si $[G : H] = 2$, alors H est distingué.

Exercice 2

On définit le centre d'un groupe G comme l'ensemble

$$Z(G) = \{z \in G : \forall g \in G, zg = gz\}.$$

- 1) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G .
- 2) Déterminer le centre du groupe symétrique \mathcal{S}_3 .
- 3) Déterminer le centre du groupe diédral D_4 .
- 4) Déterminer le centre du groupe $GL(2, \mathbf{R})$, puis $GL(3, \mathbf{R})$.

Exercice 3

Soit G un groupe. On fait agir G sur l'ensemble X de ses sous-groupes par conjugaison (voir l'exercice 4 de la feuille 2). Le stabilisateur d'un sous-groupe H est appelé le normalisateur de H et est noté $N_G(H)$.

- 1) Montrer que $N_G(H)$ est, pour l'inclusion, le plus grand sous-groupe de G dont H soit un sous-groupe distingué.
- 2) Déterminer $N_G(H)$ pour $G = \mathcal{S}_3$ et H est le sous-groupe engendré par la transposition $(1, 2)$.
- 3) Soit K un sous-groupe de $N_G(H)$. Montrer que $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$ est un sous-groupe de G .