

Polynômes et fractions rationnelles

Polynômes

Exercice 1 Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = X^2 - 4X + 3$ et $B = X^3 + X^2 - 2$.
2. $A = X^5 + 1$ et $B = X + 1$.
3. $A = 3X^7 - 2X^5 + X^3 - 4$ et $B = 2X^2 - X + 3$.

Exercice 2 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $a, b \in \mathbb{C}$ distincts. On pose $\alpha = P(a)$ et $\beta = P(b)$.

1. Calculer en fonction de a, b, α et β le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + X - 2$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos(\theta) + X \sin(\theta))^n$ par $X^2 + 1$.
4. Trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $(X - 1)^2$ (on pourra penser à dériver et évaluer en 1).

Exercice 3 Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $(1 + X^4)^n - X^n$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 4 Trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $X^5 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 1$.

Exercice 5 Trouver le pgcd de P et Q dans les cas suivants :

1. $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $Q = X^3 + X^2 - X - 1$.
2. $P = X^4 - 10X^2 + 1$ et $Q = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$.

Exercice 6 Calculer le pgcd de $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $B = X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et trouver $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $AU + BV = D$.

Exercice 7 Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$ premiers entre eux et $(U_0, V_0) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $AU_0 + BV_0 = 1$.

1. Soit $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $AU + BV = 1$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $U = U_0 + QB$ et $V = V_0 - QA$.
2. Etablir la réciproque.
3. Soient $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $B = X^2 + X + 1$. Déterminer tous les couples $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $AU + BV = 1$.

Exercice 8 Soient $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Soient $q, r \in \mathbb{N}$ le quotient et le reste de la division euclidienne de n par m (i.e. $n = mq + r$ avec $0 \leq r < m$). Effectuer la division euclidienne du polynôme $X^n - 1$ par $X^m - 1$.
2. En déduire le pgcd de $X^n - 1$ et de $X^m - 1$ en utilisant l'algorithme de Bezout.

Exercice 9 Effectuer la division puissance croissante du polynôme A par le polynôme B à l'ordre n prescrit dans les cas suivants :

1. $A = X^{2006}$, $B = 13 - 666X$, $n = 2005$.
2. $A = X^3 - 2X^2 + 4$, $B = X^2 + 1$ et $n = 3$.
3. $A = 4X^3 - 2X + 3$, $B = X^4 - X + 1$ et $n = 5$.

Exercice 10 Soient $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$. Montrer que A et B sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si A et B n'ont aucune racine commune dans $\mathbb{C}$.

Exercice 11 Soit $P = a_n X^n + \dots + a_0$ où $a_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Soit $p, q \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux tels que $\alpha = \frac{p}{q}$. Montrer que q divise a_n et p divise a_0 .

Exercice 12 Décomposer les polynômes suivants en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

1. $X^4 + X^2 + 4$.
2. $X^8 + X^4 + 1$.
3. $X^4 - 6X^3 + 7X^2 + 6X - 8$.
4. $X^{2n+1} + 1$ où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 *Polynômes interpolateurs de Lagrange.*

Soit $m \geq 2$ et soient $x_1, x_2, \dots, x_m$ m points distincts de $\mathbb{C}$. Pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, on pose

$$L_j = \frac{\prod_{k=1, k \neq j}^m (X - x_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^m (x_j - x_k)}.$$

1. Soient $(j, p) \in \{1, \dots, m\}^2$. Calculer $L_j(x_p)$.
2. Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ dans lui-même. Posons $L = \sum_{j=1}^m f(x_j) L_j$. Que peut-on dire sur le degré de L ? Montrer que pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, on a $L(x_j) = f(x_j)$.
(Le polynôme L s'appelle le polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points $x_1, x_2, \dots, x_m$.)
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note n le degré de P et on suppose $n \geq 1$. Pour tout $j \in \{1, \dots, n+1\}$ on pose $x_j = e^{i2\pi \frac{j}{n+1}}$. Soit L le polynôme interpolateur de P aux points $x_1, \dots, x_{n+1}$.
(a) Montrer que $P = L$.
(b) Que représentent les x_j ? Prouver que $\prod_{j=1}^n (X - x_j) = \sum_{j=0}^n X^j$ et en déduire la valeur de $\prod_{j=1}^n (1 - x_j)$.
(c) Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \leq \max_{|a|=1} |P(a)| (|z| + 1)^n.$$

Exercice 14 *Polynômes de Tchebychev.*

On considère la suite de polynômes réels $(T_n)_{n \geq 0}$ en l'indéterminée X , définie par la relation de récurrence :

$$T_{n+2} = 2X.T_{n+1} - T_n \quad \text{et} \quad T_0 = 1, \quad T_1 = X.$$

Les polynômes T_n sont appelés polynômes de Tchebychev de première espèce.

1. Calculer T_2, T_3 et T_4 .
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, T_n est de degré égal à n . Déterminer en fonction de n , le coefficient dominant de T_n et la valeur de $T_n(0)$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cos(x)) = \cos(nx). \tag{1}$$

4. En utilisant (1), montrer que pour $n \geq 1$, T_n a n racines distinctes dans $[-1, 1]$ et les déterminer explicitement.
5. Dériver deux fois (1) et en déduire que $(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0$.

Fractions rationnelles

Exercice 15 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(x) = \frac{x^4}{x^2 + 3x + 2}, \quad F_2(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + x - 2}, \quad F_3(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Exercice 16 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(x) = \frac{1}{x+x^3}, \quad F_2(x) = \frac{1}{x^3+6x^2+11x+6}, \quad F_3(x) = \frac{x}{x^3-4x^2+5x-2}, \quad F_4 = \frac{x}{(x-1)^3(x-2)}.$$

Exercice 17 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(x) = \frac{x^6+2}{x^5-2x^3+x}, \quad F_2(x) = \frac{3x^4-x^3+5x^2-x+2}{x^2+1}, \quad F_3(x) = \frac{x^3}{(x^2+1)(x^2+x+1)}.$$

Exercice 18 En effectuant des divisions euclidiennes successives, déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de

$$F(x) = \frac{x^5+x^4-x^2}{(x^2+x+1)^3}.$$

Exercice 19 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(x) = \frac{x^2}{x^4+1}, \quad F_2(x) = \frac{1}{x^6+1}.$$

Exercice 20 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle :

$$F(x) = \frac{1}{x^3-1}.$$

Exercice 21 Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. On suppose que $a \in \mathbb{C}$ est un pôle simple de F , c'est à dire $P(a) \neq 0$ et a est racine simple de Q . La décomposition en éléments simples de F s'écrit : $F = \frac{\alpha}{x-a} + \dots$. Montrer que $\alpha = \frac{P(a)}{Q'(a)}$, où Q' désigne le polynôme dérivé de Q .

Exercice 22 Pour $n \geq 1$, on considère la fraction rationnelle $F_n(x) = \frac{1}{x^n-1}$.

1. Décomposer F_n en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
2. En déduire la décomposition en éléments simples de F_n sur $\mathbb{R}$. On distinguera les cas n pair et n impair.

Exercice 23 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose $F_\alpha(x) = \frac{x^2}{x^4-2\cos(2\alpha)x^2+1}$. Décomposer F_α en éléments simples sur $\mathbb{R}$. On étudiera séparément les cas $\alpha \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ et $\alpha \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

Exercice 24 Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et admettant n racines réelles distinctes : $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$.

1. Donner la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $F(X) = \frac{P'(X)}{P(X)}$. On se servira du résultat de l'exercice 21.
2. En dérivant F , montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : P'^2(x) - P(x)P''(x) > 0$.
3. Soit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. En utilisant le théorème de Rolle, montrer que $P^{(k)}$ admet $n-k$ racines réelles distinctes.
4. En déduire que $\forall k \in \{1, \dots, n-1\} : a_{k-1}a_{k+1} < a_k^2$.