

Espaces vectoriels et applications linéaires

Espaces vectoriels

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel. Pour $\vec{x}, \vec{y} \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, montrer que l'on a :

1. $0\vec{x} = \vec{O}$, $1\vec{x} = \vec{x}$, $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$
2. $\lambda(\vec{x} - \vec{y}) = \lambda\vec{x} - \lambda\vec{y}$.
3. $(\lambda - \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} - \mu\vec{x}$.
4. $(-\lambda)(-\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Exercice 2 On définit sur $\mathbb{R}^n$ les deux lois suivantes :

Pour tous $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

Montrer que $\mathbb{R}^n$ muni de ces deux lois est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 3 Sur $\mathbb{R}^2$, on définit les deux lois suivantes : pour $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ et } \lambda \star (x, y) = (\lambda x, 0)$$

Le triplet $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? Quels axiomes d'espace vectoriel sont vérifiés ?

Exercice 4 Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$ on définit l'addition par $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et la multiplication externe par le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ par $\lambda(x, y) = (\lambda x, 0)$. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5 Sur l'ensemble $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ on définit l'addition par $(x, y) + (x', y') = (xx', y + y')$ et la multiplication externe par le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ par $\lambda(x, y) = (x^\lambda, \lambda y)$. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Déterminer si l'ensemble $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dans les cas où l'addition dans $\mathbb{R}^2$ et la multiplication par un scalaire sur $\mathbb{R}$ sont définies par

1. $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, y)$;
2. $(x, y) + (x', y') = (x, y)$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$;
3. $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\lambda(x, y) = (\lambda^2 x, \lambda^2 y)$.

Exercice 7 Soit V l'ensemble des fonctions d'un ensemble non vide X vers le corps $\mathbb{K}$. Etant donnés f et g dans V et λ dans $\mathbb{K}$ on définit les fonctions $f + g$ et λf de V par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

pour tout x dans X . Montrer que V , muni de ces opérations, est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Exercice 8 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$$F = \mathbb{Z}^2, \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; |x| = |y|\}, \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 2x + 3y = 0\}$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 2x + 3y = 3\}, \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0 \text{ et } y = 0\}$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq r^2\}, \quad r > 0.$$

Dans chacun des cas ci-dessus, on déterminera $\text{Vect}(F)$.

Exercice 9

- (i) Quels sont les sous-espaces vectoriels dans $\mathbb{R}$.
- (ii) Quels sont les sous-espaces vectoriels dans $\mathbb{R}^2$.
- (iii) Quels sont les sous-espaces vectoriels dans $\mathbb{R}^3$.

Applications linéaires

Exercice 10 Montrer que tout $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 11 Vérifier les assertions suivantes :

- (a) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ;
- (b) $(x, y) \mapsto x + iy$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 12 Considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \bar{z} \end{array}$$

- 1. Montrer que f est $\mathbb{R}$ -linéaire quand on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- 2. Montrer que f n'est pas $\mathbb{C}$ -linéaire quand on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Exercice 13

- (a) Vérifier que la dérivée
 $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \mapsto P' = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \dots + a_1$
est un endomorphisme linéaire dans l'espace vectoriel des polynômes.
- (b) Idem pour l'intégrale
 $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \mapsto \int P = \frac{a_n}{n+1} X^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} X^n + \dots + \frac{a_1}{2} X^2 + a_0 X$
- (c) Est-ce que ce sont des isomorphismes réciproques ?

Exercice 14 Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Montrer que f est linéaire si et seulement s'il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on ait

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

Exercice 15 Soient E , F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} f : E & \longrightarrow & F \times G \\ x & \longmapsto & (g(x), h(x)) \end{array}$$

Montrer que f est linéaire si et seulement si g et h sont linéaires.

Exercice 16 On se place dans l'espace vectoriel E des suites numériques. On définit la fonction *shift* ou *décalage* S de E dans E qui, à toute suite $(u_n)_n$, associe la suite $(v_n)_n$ telle que $v_n = u_{n+1}$ pour tout n . Démontrer que S est une application linéaire de E dans E . Déterminer $\text{Ker}(S)$ et $\text{Im}(S)$.

Exercice 17 Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit Δ l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $\Delta(f) = g$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. (a) Vérifier que pour toute fonction f de E , $\Delta(f)$ est dérivable.
(b) En déduire que Δ n'est pas surjective.
2. Démontrer que Δ est un endomorphisme de E .
3. Démontrer que Δ est injective.

Exercice 18 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme f de E est dit nilpotent si il existe un entier naturel p tel que $f^p = 0$.

1. Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application définie par $f(x, y) = (y, 0)$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et que f est nilpotent.
2. On revient au cas général. Soit f un endomorphisme nilpotent. Soit q le plus petit entier naturel tel que $f^q = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $f^{q-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, f(x), \dots, f^{q-1}(x)\}$ est libre. En déduire que $q \leq \dim(E)$.

Exercice 19 Montrer que les vecteurs $e = (1, 0)$ et $f = (1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 20 On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{K}^n$:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

Montrer que les vecteurs $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment une base de $\mathbb{K}^n$, appelée base canonique.

Exercice 21 Montrer que si $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_n\}$ est une famille libre dans un espace vectoriel E , alors pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on a $x_i \neq 0$ et $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.

Exercice 22 Soient $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_p\}$ et $\mathcal{F}' = \{x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n\}$ deux familles d'éléments dans un espace vectoriel E . Montrer que l'on a

1. Si $\mathcal{F}'$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est libre.
2. Si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $\mathcal{F}'$ est génératrice.

Exercice 23 Soient $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_p\}$ et $\mathcal{F}' = \{x_1, \dots, x_p, x_{p+1}\}$ deux familles d'éléments dans un espace vectoriel E . Montrer que l'on a

1. Si $\mathcal{F}$ est libre et si $x_{p+1} \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$, alors $\mathcal{F}'$ est libre.
2. Si $\mathcal{F}'$ est génératrice de E et si $x_{p+1} \in \text{Vect}(\mathcal{F})$, alors $\mathcal{F}$ est génératrice de E .

Exercice 24 Soient $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $\{x_1, \dots, x_n\}$ une famille d'éléments dans E .

1. Montrer que si $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ est une famille libre dans F , alors $\{x_1, \dots, x_n\}$ est une famille libre dans E .
2. Montrer que si f est injective et si $\{x_1, \dots, x_n\}$ est une famille libre dans E , alors $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ est aussi une famille libre dans F .

Exercice 25 Soient $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $\{x_1, \dots, x_n\}$ une famille d'éléments dans E .

1. Montrer que si $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ est une famille génératrice de F , alors f est surjective.
2. Montrer que si f est surjective et si $\{x_1, \dots, x_n\}$ est génératrice de E , alors $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ est génératrice de F .

Exercice 26 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soient F un espace vectoriel et $\{y_1, \dots, y_n\}$ des vecteurs de F . Montrer qu'il existe une unique application linéaire T de E dans F telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on ait $T(e_i) = y_i$. En déduire qu'il existe une application linéaire bijective de E dans $\mathbb{K}^n$.

Exercice 27 Pour quelles valeurs de a , les vecteurs

$$V_1 = (2, 1, 0), \quad V_2 = (-1, 1, 0) \quad \text{et} \quad V_3 = (-3, -4, a)$$

sont linéairement indépendants ?

Exercice 28 Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les éléments suivants définis par : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \sin(x), \quad f_3(x) = \sin(2x), \quad f_4(x) = \sin(3x) \quad \text{et} \quad \varphi_j(x) = e^{jx}$$

1. Montrer que $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ forme une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 29 On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{C}^3$:

$$V_1 = (1 - i, i, 1 + i), \quad V_2 = (-1, 1, 3) \quad \text{et} \quad V_3 = (1 - i, i, i)$$

1. Montrer que (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{C}^3$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $V = (1 + i, 2, i)$ dans la base (V_1, V_2, V_3) .

Exercice 30 On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$V_1 = (1, -2, 1, 2), \quad V_2 = (1, -3, 1, 2), \quad V_3 = (2, -4, 3, 4) \quad \text{et} \quad V_4 = (1, -1, 2, 3)$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.
2. Soient a, b, c, d des nombres réels. Calculer les coordonnées du vecteur $V = (a, b, c, d)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 31 Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$, préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels et lorsque c'est le cas, en donner une base :

1. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; 3x - y + t = 0\}$.
2. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x - y + 2z + t = 1\}$.
3. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x + t = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\}$.
4. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; |x + t| = |y|\}$.

Exercice 32 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(2, 3, -1)$ et $(1, -1, -2)$. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(3, 7, 0)$ et $(5, 0, -7)$. Montrer que l'on a $F = G$ et trouver une équation de F .

Exercice 33 Soit a un nombre réel. Quel est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(a + 2, a, a - 2)$, $(1, a, -1)$ et $(a, -a, 1)$?

Exercice 34 On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$V_1 = (-3, 1, 0, 2), \quad V_2 = (-5, 2, 1, 2), \quad V_3 = (1, 1, 4, -6) \quad \text{et} \quad V_4 = (-1, 0, -1, 2)$$

1. Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par V_1 et V_2 est égal au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par V_3 et V_4 .
2. Montrer que les vecteurs V_1 et V_2 sont linéairement indépendants. Compléter ces vecteurs pour former une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 35 On désigne par $\mathcal{P}_n$ ¹ l'ensemble des fonctions polynômiales

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

réelles de degré inférieur ou égal à n .

1. Vérifier que $\mathcal{P}_n$ est un espace vectoriel de dimension $n + 1$ et en donner la base canonique.
2. Vérifier que la dérivée est une application linéaire de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathcal{P}_{n-1}$.
3. Qu'en est-il de l'intégrale ?

Exercice 36 Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 2. Soient $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{P}_2$ définis par :

$$P_1(x) = x^2, \quad P_2(x) = (x - 1)^2, \quad P_3(x) = (x + 1)^2$$

¹Dans certains livres, on utilise la notation $\mathbb{R}_n[X]$

1. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathcal{P}_2$.
2. Déterminer dans cette base les coordonnées des Q et R définis par $Q(x) = 12$ et $R(x) = 3x^2 - 10x + 1$.

Exercice 37 Soient $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 3 et T l'application de $\mathcal{P}_3$ dans lui-même définie par :

$$T(P)(x) = P(x) + (1-x)P'(x)$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{P}_3$.
2. Déterminer une base de $T(\mathcal{P}_3)$.
3. Déterminer une base de $\ker(T)$.
4. Montrer que $\ker(T) \cap T(\mathcal{P}_3) = \{0\}$.

Exercice 38 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs

$$(1, 0, 1, -1, 0), \quad (2, 1, 2, 1, 1), \quad \text{et} \quad (3, 1, 2, 0, 1)$$

Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs

$$(1, 1, 3, -1, 1), \quad (2, -1, -4, 4, -1), \quad (0, 1, 2, 0, 1), \quad \text{et} \quad (1, -2, -3, -1, -2)$$

1. Trouver une base de F et une base de G .
2. Déterminer une base de $\text{Vect}(F \cup G)$ et en donner une équation.
3. Trouver des équations de F et des équations de G .
4. Déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice 39 Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\ker(f) = \text{Im}(f)$.
2. $f \circ f = 0$ et $\dim(E) = 2 \dim(\text{Im}(f))$.

Exercice 40 On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$$

1. Déterminer l'image par f de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et calculer le rang de f .
2. En déduire la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

Exercice 41 On note $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(e_1) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad f(e_2) = f(e_4) = -\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3$$

1. Déterminer une base de l'image de f .
2. Déterminer une base du noyau de f .

Exercice 42 On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs suivants :

$$u = (1, -2, 0), \quad v = (1, -3, 0) \quad \text{et} \quad w = (0, 0, 1)$$

1. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$f(u) = (1, 0, 1), \quad f(v) = (1, 1, 2) \quad \text{et} \quad f(w) = (2, 1, 3)$$

Déterminer le rang et le noyau de f .

Exercice 43 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + 2e_3, \quad f(e_2) = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_1 + 2e_2 + 3e_3$$

1. Calculer le rang de f et en déduire la dimension du noyau de f .

- Déterminer une base de l'image de f .
- Trouver une condition pour qu'un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ soit dans $\ker(f)$ et donner une base du noyau.

Exercice 44 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et E' un sous-espace vectoriel de E . Montrer que l'on a

- E' est de dimension finie et $\dim(E') \leq \dim(E)$.
- $\dim(E') = \dim(E)$ si et seulement si $E' = E$.

Sous-Espaces Vectoriels Supplémentaires

Exercice 45 Montrer que si $E = \mathbb{R}^2$, et $E_1 = \{(x, 0) ; x \in \mathbb{R}\}$, $E_2 = \{(0, y) ; y \in \mathbb{R}\}$, alors on a $E = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 46 Montrer que si $E = \mathbb{R}^2$, et $E_1 = \{(x, x) ; x \in \mathbb{R}\}$, $E_2 = \{(0, y) ; y \in \mathbb{R}\}$, alors on a $E = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 47 Soit $E = \mathcal{E}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a vu que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soient E_1 (resp. E_2) l'ensemble des applications impaires (resp. paires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'on a $E = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 48 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $p : E \longrightarrow E$ une application linéaire telle que $p \circ p = p$. (On dit que p est un projecteur).

- Montrer que l'application linéaire $id - p$ est aussi un projecteur.
- Montrer que l'on a $\ker(p) = \text{Im}(id - p)$ et $\text{Im}(p) = \ker(id - p)$.
- Montrer que les sous-espaces vectoriels $\ker(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont supplémentaires.

Exercice 49 Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .

- Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$. Etablir dans ce cas :

$$\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q).$$

- On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $p \circ q = \alpha q \circ p$. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, alors $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 50 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{R}$. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

- Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$.
- En déduire que f et g ont même rang.

Exercice 51 Considérons l'application

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, -z) \end{aligned}$$

- Montrer que S est linéaire et vérifie $S \circ S = id$.
- Montrer que $F = \{X \in \mathbb{R}^3 ; S(X) = -X\}$ et $G = \{X \in \mathbb{R}^3 ; S(X) = X\}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 52 Soient E un espace vectoriel et S un endomorphisme de E . On pose $P = \frac{id + S}{2}$.

- Montrer que P est un projecteur si et seulement si on a $S \circ S = id$.
- Montrer que l'on a $E = \ker(S - id) \oplus \text{Im}(S - id)$ si $S \circ S = id$.

Exercice 53 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = id_E$. Considérons $F = \{x + f(x), x \in E\}$ et $G = \{x - f(x), x \in E\}$.

- Montrer que $E = F \oplus G$.

2. En déduire qu'il existe une base (e_i) de E telle que $f(e_i) = e_i$ ou $f(e_i) = -e_i$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 54 Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont supplémentaires, i.e. $E = E_1 \oplus E_2$.
2. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $x_1 \in E_1$ et un unique $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$.

Exercice 55 Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E . Pour $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, on pose $\pi_1(x) = x_1$, et $\pi_2(x) = x_2$.

1. Montrer que π_1 et π_2 sont des projecteurs.
2. Déterminer $\ker(\pi_1)$ et $\text{Im}(\pi_1)$.
3. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} T : E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array}$$

est un isomorphisme.

Exercice 56 Soit H un espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\dim(H) = n - 1$. (Dans ce cas, on dit que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$).
2. Il existe une forme linéaire non nulle f sur $\mathbb{R}^n$ telle que $H = \ker(f)$.

Exercice 57 Déterminer l'équation d'un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 58 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(0, -1, 1, 1)$, $(2, 1, -1, 1)$ et $(1, 1, -1, 0)$. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, 3, 0, 1)$, $(2, 4, -2, 2)$ et $(-1, -2, 1, -1)$. Les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^4$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 59 Soit $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient F l'ensemble des fonctions constantes sur $[0, 1]$ et G l'ensemble des $g \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1])$ telles que

$$\int_0^1 g(t) dt = 0$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1])$.

Exercice 60 Soient E un espace vectoriel, et F, G des sous-espaces vectoriels de E . Montrer que si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F et si $(e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$ est une base de G , alors les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires si et seulement si $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$ est une base de E .