

Feuille Algèbre 3

Applications linéaires et matrices

Exercice 1 On considère les matrices à coefficients réels suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Parmi les expressions suivantes, dire celles qui ont un sens et les calculer le cas échéant : A^2 , AB , BA , BD , BC , tB , tC , ${}^tC {}^tB$, $A(B {}^t(BC))$.

Exercice 2 *Matrices de rotations.* Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien orienté que l'on munit d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$, et r_θ la rotation de centre O et d'angle θ du plan $\mathcal{P}$.

1. Soit M un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées cartésiennes (x, y) . On note (r, ϕ) les coordonnées polaires du point M . Soit $M' = r_\theta(M)$. Déterminer les coordonnées polaires de M' et en déduire l'expression des coordonnées cartésiennes (x', y') de M' , en fonction de celles de M . On écrira ces relations sous la forme

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

où $R_\theta \in M_2(\mathbf{R})$ est une matrice à déterminer.

2. Montrer que $\det R_\theta = 1$, ${}^tR_\theta R_\theta = I$, $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$, $R_\theta R_\gamma = R_\gamma R_\theta = R_{\theta+\gamma}$ et que $R_\theta^2 - 2\cos(\theta)R_\theta + I_2 = 0$.

Exercice 3 Indiquer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 4 Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (3x + y + 2z + t, -x + 2y - 3z + 9t, x + y + 3t).$$

1. Déterminer M , la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^4$ et $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs colonnes de la matrice M . Que vaut le rang de M ?

3. Soit $(\mathcal{H})$ le système homogène d'équations suivant :

$$(\mathcal{H}) : \begin{cases} 3x + y + 2z + t = 0 \\ -x + 2y - 3z + 9t = 0 \\ x + y + 3t = 0 \end{cases}$$

Quel est le rapport entre l'ensemble des solutions, S_H , du système $(\mathcal{H})$ et f (ou M) ? En déduire que S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ et donner sa dimension.

4. Soit $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}^3$. A quelle condition sur u le système, $(\mathcal{E})$, à second membre suivant possède-t-il au moins une solution ?

$$(\mathcal{E}) : \begin{cases} 3x + y + 2z + t = u_1 \\ -x + 2y - 3z + 9t = u_2 \\ x + y + 3t = u_3 \end{cases}$$

5. Déterminer si $(\mathcal{E})$ possède des solutions (sans en faire le calcul) pour les différentes valeurs de u suivantes : $u = (2, -3, 1)$, $u = (4, 1, 2)$, $u = (0, 4, 7)$.

Exercice 5 Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et u (respectivement v) l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans cette base est

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \left(\text{respectivement} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

1. Déterminer le noyau et l'image de u et de v . Calculer leur rang de deux manières.
2. Calculer la matrice de u^2 dans la base $\mathcal{B}$ et montrer que $u^2 - 3u = 0$. Calculer u^p pour tout $p \in \mathbf{N}$.

Exercice 6

1. On pose $\epsilon_1 = (1, 1, 0)$, $\epsilon_2 = (0, 1, 1)$ et $\epsilon_3 = (1, 0, 1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Ecrire la matrice de passage $P_{\mathcal{CB}}$ de la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbf{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$. Pourquoi est-on sûr que P est inversible ? Calculer son inverse.
3. On considère l'application u de $\mathbf{R}^3$ dans lui-même définie par

$$u(x, y, z) = (-y + z, \frac{1}{2}(-x - y + 3z), \frac{1}{2}(x - y + 3z)).$$

Montrer que u est linéaire et calculer ses matrices représentatives dans la base canonique puis dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 7 On pose $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (-1, 1)$, $w_1 = (1, 2, 0)$, $w_2 = (1, 1, 1)$ et $w_3 = (-1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$ et que $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Soit ϕ l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par $\phi(x, y) = (x - y, x, x + 2y)$. Calculer la matrice de ϕ dans le couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.