

Déterminants et applications

Exercice 1 Calculer le déterminant des matrices suivantes par au moins deux méthodes (par exemple développement suivant une ligne ou une colonne ou à l'aide d'opérations élémentaires).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Prouver l'identité suivante :

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (x + a + b + c)(x + a - b - c)(x - a + b - c)(x - a - b + c).$$

Exercice 3 Décomposer en facteurs premiers de $\mathbb{N}^*$: 451, 2706, 1804, 2255. En déduire que le déterminant D suivant est nul.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 1 & 8 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}.$$

Exercice 4 a, b, c, d étant des nombres réels, calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 1 & c & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

Exercice 5 a étant un nombre réel.

- Déterminer le rang de la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 2a+1 & -a & a+1 \\ a-2 & a-1 & a-2 \\ 2a-1 & a-1 & 2a-1 \end{pmatrix}.$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$,

$$(S_a) \quad \begin{cases} (2a+1)x - ay + (a+1)z &= a-1 \\ (a-2)x + (a-1)y + (a-2)z &= a \\ (2a-1)x + (a-1)y + (2a-1)z &= a. \end{cases}$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système (S'_a) égal à (S_a) auquel on ajoute

$$ax + (1-2a)y + 2az = 2a.$$

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ et discuter suivant les valeurs de $a, b \in \mathbb{C}$ le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} -ax + by + z &= 0 \\ x - ay + bz &= 0 \\ bx + y - az &= 0. \end{cases}$$

Exercice 7 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \mapsto A(t)$ une application dérivable de I dans $M_n(\mathbb{R})$. On note $C_1(t), \dots, C_n(t)$ les colonnes de $A(t)$. Soit $D(t)$ le déterminant de $A(t)$. Montrer que la fonction $D : t \mapsto D(t)$ est dérivable et que

$$D'(t) = \det(C_1'(t), C_2(t), \dots, C_n(t)) + \det(C_1(t), C_2'(t), C_3(t), \dots, C_n(t)) + \dots + \det(C_1(t), \dots, C_{n-1}(t), C_n'(t))$$

Exercice 8 On utilise les notations du DM4. Montrer que le rang de l'application linéaire f qui y est définie vaut $m + n - \deg(\text{PGCD}(P, Q))$.