

Feuille 1 Fonctions réciproques & Dérivabilité

Quelques Rappels

Exercice 1 Soit f une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Rappeler la nature "topologique" de $f(I)$.
2. Montrer que si f est strictement monotone, alors f définit une bijection de I sur $f(I)$. La réciproque est-elle vraie ? Si oui, donner une démonstration, si non, donner un contre exemple.

Exercice 2 -Vrai ou Faux-

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et I un intervalle inclus dans le domaine de définition de f .

1. Si f est continue alors $f(I)$ est un intervalle de même nature que I .
2. Si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue.
3. Si f est continue, alors $f : I \rightarrow f(I)$ est une bijection.
4. Si $f : I \rightarrow f(I)$ est bijective et si sa réciproque est continue, alors f est continue et strictement monotone sur I .
5. Si f est continue, dérivable et strictement monotone sur I , alors $f : I \rightarrow f(I)$ est une bijection et sa réciproque est dérivable.

Dérivabilité

Exercice 3 Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables en $x_0 \in I$.

1. En revenant à la définition, montrer que $f+g$ et fg sont dérivables en x_0 , et calculer leur dérivée.
2. En déduire que si $f'(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0 , et calculer sa dérivée.

Exercice 4 En revenant à la définition donner le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. La fonction $x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}$, avec $n \geq 1$. Que se passe-t-il pour $n \leq -1$?
2. La fonction $x \mapsto |x|$.
3. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0, +\infty[$.

Exercice 5

1. Rappeler la formule donnant la dérivée d'une fonction composée.
2. Donner le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer les dérivées : $x \mapsto |x^3 + 1|$, $x \mapsto \cos(\ln x)$, $x \mapsto \sqrt{x^3 - 3x^2 - 2x - 4}$, $x \mapsto \ln(x^2 + x - 2)$ ¹

Fonctions exponentielles, logarithmes et puissances

1. Comparait avec la fonction $x \mapsto \ln(x-1) + \ln(x+2)$.
2. On pourra utiliser la relation démontrée dans la question précédente.

Exercice 6 Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{E}_\alpha$ l'équation. $(\mathcal{E}_\alpha) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = \alpha$.
On rappelle que $\exp$ est une solution de l'équation $\mathcal{E}_1$.

1. Montrer que pour tout α dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathcal{E}_\alpha$ admet une unique solution que l'on écrira en fonction de $\exp$.
2. Étant donné $a \in \mathbb{R}$, on pose $F_a(x) = \exp(x+a)$.
 - (a) Montrer que F_a est solution d'une équation $\mathcal{E}_\alpha$ pour un α que l'on déterminera.
 - (b) En déduire une relation bien connue vérifiée par $\exp$.
3. (a) Montrer que $\exp$ est une fonction strictement croissante.
 - (b) Calculer les limites de $\exp$ en $+\infty$ puis en $-\infty$ ².
 - (c) En utilisant le théorème des accroissements finis appliqué à $\exp$ sur $[0, x]$, montrer que $\exp x > x+1$ pour $x \geq 0$.
 - (d) Déduire de cette inégalité le fait que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 7 Pour chacune des fonctions suivantes, on déterminera les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité. On calculera la dérivée et on étudiera leurs variations. Enfin on calculera la limite en 0.

- a) $((x-1)(x-2)(x-3))^{5/2}$
- b) $x \mapsto x^{-\ln x}$
- c) $x \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$

Exercice 8 Résoudre les équations suivantes

$$6^{2-x} 3^{x+1} = 864, \quad 7^{x+2} 7^{x-3} = 343 \quad \text{et} \quad 9 \cdot 3^{2x} - 82 \cdot 3^x + 9 = 0.$$

Exercice 9 Soit a un nombre strictement positif.

1. Étudier et dessiner le graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$.
2. Soit b un nombre strictement positif. Montrer que l'équation $a^x = b$ admet une unique solution réelle; vérifier qu'elle est positive si a et b sont tous deux plus grands ou plus petits que 1, négative dans le cas contraire. Comment est habituellement notée la solution ?
3. Déterminer la valeur des nombres suivants :

$$\log_3 9; \log_{10} 0,1; \log_3 \frac{1}{81}; \log_5 1.$$

4. Si b et c sont deux nombres strictement positifs, montrer que

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c \quad \text{et} \quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

5. Si b est un nombre strictement positif et c un nombre réel, montrer que

$$\log_a b^c = c \log_a b.$$

6. Comparer les nombres $\log_4 5$ et $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{25}$.

Exercice 10 Résoudre les équations

$$\ln(x+1) + \ln(x-1) - \ln(x-2) = \ln 8, \quad \frac{1}{2} \log_{10} x + \frac{1}{2} \log_{10}(3x+5) = 1 \quad \text{et} \quad x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}.$$

Exercice 11 Résoudre les inéquations

$$\log_{10}(2x^2 - 7x + 103) > 2, \quad \ln(x^2 - 7x + 11) < 0 \quad \text{et} \quad (x^2 + x + 1)^x < 1.$$

Exercice 12 Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} \log_{10} x + \log_{10} y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2^{2x+1} + 2 \cdot 3^{2y} = 290 \\ 2^x \cdot 3^y = 72 \end{cases}.$$

Fonctions trigonométriques

Exercice 13

- Montrer que $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est une bijection. On note Arccos sa réciproque. Calculer $\text{Arccos}(1)$, $\text{Arccos}(-1)$ ainsi que $\text{Arccos}(\frac{1}{2})$. Donner le domaine de dérivabilité de Arccos et calculer sa dérivée.
- Montrer que $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ est une bijection. On note Arcsin sa réciproque. Calculer $\text{Arcsin}(0)$, $\text{Arcsin}(-1)$ ainsi que $\text{Arcsin}(\frac{1}{2})$. Donner le domaine de dérivabilité de Arcsin et calculer sa dérivée.
- Montrer que $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection. On note Arctan sa réciproque. Calculer $\text{Arctan}(1)$, $\text{Arctan}(0)$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x)$. Donner le domaine de dérivabilité de Arctan et calculer sa dérivée.

Exercice 14 Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x}$. Que peut-on en déduire concernant f ?

Exercice 15 Simplifier l'expression $\text{Arcsin}(\sin(2x))$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Dessiner le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \text{Arcsin}(\sin(2x))$.

Exercice 16 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes
 $\text{Arcsin } x = 2 \text{Arctan } x$ et
 $\text{Arcsin } x - \text{Arccos } x = 2 \text{Arctan } 2x - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 17 On considère la fonction g définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = \text{Arctan } x + 1 - x$.

- Dresser le tableau des variations de g .
- Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note h sa réciproque.

3. Calculer $g(0)$, $g(1)$, $h(1)$ et $h(\frac{\pi}{4})$.

4. Montrer que h est une fonction dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et que pour tout point x dans cet ensemble on a

$$1 + h'(x) + \frac{1}{h^2(x)} = 0.$$

Exercice 18 Examen 2006/2007

On considère la fonction $f : x \mapsto \text{Arccos} \left(\frac{3}{x} + 1 \right)$

- Donner l'ensemble de définition de f .
- En quels points la fonction f est-elle continue?
- En quels points la fonction f est-elle dérivable?
- Donner la dérivée de f .

Exercice 19 Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$. On définit par récurrence la suite (u_n) en posant $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Établir le tableau des variations de f et montrer que $f([0, \frac{3}{4}]) \subset [0, \frac{3}{4}]$. En déduire que f admet dans cet intervalle au moins un point fixe.
- Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite l est un point fixe de f compris entre 0 et $\frac{3}{4}$.
- Montrer que pour tout entier n on a : $0 \leq l - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(u_n - l)$. En déduire l'encadrement : $0 \leq l - u_n \leq (\frac{2}{3})^n$. Comment peut-on choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de l à 10^{-2} près?
- Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 4x + 2$. Montrer que l est l'unique racine de P dans l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 20 Soit F une fonction continue et dérivable sur I , intervalle ouvert, non vide et non majoré de $\mathbb{R}$. On note f la dérivée de F sur I et on suppose que f est strictement décroissante.

- Montrer que pour tout $x \in I$ on a les inégalités :

$$f(x+1) < F(x+1) - F(x) < f(x).$$

- On suppose que $1 \in I$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$F(n+1) - F(1) < f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) < f(1) + F(n) - F(1).$$

Pour tout entier $n \geq 1$ on définit $u_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) - F(n)$.

- Montrer que (u_n) est décroissante.
- On suppose que la suite $(F(n+1) - F(n))$ admet une limite finie L . Montrer que (u_n) est convergente.
- Appliquer ces résultats avec $I =]0, +\infty[$ et $F(x) = \ln x$ puis $F(x) = x^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$.