

Intégrales et primitives

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que :

1. Si f est paire, alors $\forall a \in \mathbb{R}, \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.
2. Si f est impaire, alors $\forall a \in \mathbb{R}, \int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
3. Si f est périodique de période T , alors $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$
4. Montrer que $\int_0^\pi x f(\sin(x))dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin(x))dx$ (poser $x = \pi - t$)
5. Calculer alors $I = \int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{4 - \sin^2(x)} dx$.

Exercice 2 Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx, \quad n \in \mathbb{N}$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2 .
2. Etablir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n .
3. Trouver suivant la parité de n la valeur de I_n .
4. En déduire la valeur de $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$

Exercice 3 Calculer par intégration par parties les intégrales ou primitives suivantes :

$$\int x \sin(2x)dx, \quad \int x^2 \ln x dx, \quad \int_0^1 x e^{-x} dx, \quad \int_0^{\pi/2} x^2 \cos(3x)dx.$$

Exercice 4 Calculer

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan}(x)dx, \quad \text{puis} \quad \int_0^1 x \operatorname{Arctan}^2(x)dx.$$

Exercice 5 Soit la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1 + \cos(t)}{\sqrt{t^4 + t^2 + 4}} dt$$

1. Préciser l'ensemble de définition de F et étudier la parité de F .
2. Etudier la dérivabilité de F et déterminer la fonction dérivée F' .
3. Trouver $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{\sin(x)}$.
4. En utilisant la formule de la moyenne, déterminer $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$

Exercice 6 Calculer par intégration par parties les intégrales ou primitives suivantes :

$$\int \frac{x}{\sin^2(x)} dx, \quad \int \frac{\ln(1+2x)}{x^2} dx, \quad \int \sin(\ln x) dx, \quad \int_0^{\pi/2} \cos(x) \ln(1 + \cos x) dx$$

Exercice 7 Calculer les intégrales ou primitives suivantes en effectuant le changement de variable indiqué :

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}} dx \quad (x = 1/t), \quad \int x(5x^2-3)^7 dx \quad (t = 5x^2-3), \\ & \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx \quad (x = -\ln t), \quad \int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx, \quad (t = \sqrt{x+1}), \\ & \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx, \quad (x = \tan u) \end{aligned}$$

Exercice 8 Calculer les intégrales ou primitives suivantes en effectuant un changement de variable

$$\int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} dx, \quad \int \frac{1}{\operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x)} dx$$
$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} dx, \quad \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2} dx, \quad \int_0^a a \sqrt{a^2-x^2} dx.$$

Exercice 9

1. Montrer, en utilisant un changement de variable, que :

$$\int_1^2 \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4u}{(1-u^2)(1+u^2)} du.$$

2. Calculer $\int \frac{u^2}{(1-u^2)(1+u^2)} du$ et en déduire la valeur de l'intégrale précédente.

Exercice 10

Calculer les intégrales ou primitives suivantes :

$$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx, \quad \int \frac{5x+2}{x^3-5x^2+4x} dx, \quad \int \frac{1}{x(x+1)^2} dx,$$
$$\int \frac{x}{(x+1)^3} dx, \quad \int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)} dx, \quad \int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} dx.$$

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int x^n e^{-x} dx$.