

Feuille Analyse 3

Fonctions vectorielles

Exercice 1.

Déterminer et représenter graphiquement les ensembles $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) > 0\}$, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 4y + 3z = 12\}$ et enfin $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x^2 + 6x + 3y^2 + 3z^2 = 0\}$.

Exercice 2.

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

a) Si $\langle x, y \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien des deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

b) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty,$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty.$$

c) Dans le cas où $n = 2$, déterminer et représenter graphiquement le cercle de centre 0 et de rayon 1 pour chacune de ces 3 normes $\|\cdot\|_p$.

Exercice 3.

Montrer que deux vecteurs x et y de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Exercice 4.

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

a) Soit x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout y dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $x = 0$.

b) On dit qu'un ensemble A de $\mathbb{R}^n$ est dense si pour tout y dans $\mathbb{R}^n$ il existe une suite d'éléments de A convergeant vers y . Soit alors A un tel ensemble et x dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout y dans A . Montrer que $x = 0$.

c) Montrer que $\|x\|_2 = \sup_{y \in \mathbb{R}^n, \|y\|=1} \langle x, y \rangle = \sup_{y \in \mathbb{R}^n, \|y\| \leq 1} \langle x, y \rangle$.

d) Montrer l'identité du parallélogramme:

$$\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2).$$

Exercice 5.

Soit f une application de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ dans lui-même telle que $f(0) = 0$ et $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$ en développant la quantité $|f(x) - f(y)|^2$ de deux manières différentes.
2. Développer la quantité $|f(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y)|^2$ et en déduire que f est linéaire.

Exercice 6.

Montrer que l'application f définie par $f(t) = (e^t, \cos t, \sin t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 7.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_2, u_3, u_4 . Formuler une conjecture générale sur le terme général de u_n et la montrer par récurrence ou par l'algèbre linéaire.

Exercice 8.

Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par

$$u_0 = 1, u_1 = 2, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n - n.$$

Exercice 9.

Calculer en fonction de n le terme général des suites (u_n) définies par récurrence par a) $u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 2$; b) $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ et $u_0 = 1, u_1 = 4$; c) $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ et $u_0 = 1, u_1 = 3$.

Exercice 10.

On a pu lire dans un numéro de "La Recherche" (il y a quelques années!) que la suite récurrente suivante met en défaut les ordinateurs les plus puissants:

$$q_{n+2} = 111 - \frac{1130}{q_{n+1}} + \frac{3000}{q_{n+1}q_n}$$

avec les conditions initiales

$$q_0 = 2 \text{ et } q_1 = -4$$

La limite théorique est 6 mais la limite observée est toujours 100. Le but de cet exercice est de comprendre ce phénomène.

- a) On pose $q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ où $x_0 = 1$. Montrer que la suite (x_n) vérifie une équation aux différences finies linéaire du troisième ordre.
- b) Montrer que son équation caractéristique a 3 racines $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et donner la solution générale de cette équation.
- c) Déterminer la solution (x_n) de cette équation qui vérifie les conditions initiales données.
- d) Dédire l'expression de q_n . Calculer la limite de q_n quand n tend vers l'infini.
- e) Expliquer pourquoi la limite observée de q_n est 100 et non 6.

Exercice 11.

Dans une Université, un cycle d'études dure deux ans, le premier et le deuxième niveaux. On sait qu'en moyenne chaque année:

- un quart des étudiants du premier niveau abandonnent, un quart redoublent et la moitié passent en deuxième niveau,
- un quart des étudiants du deuxième niveau redoublent et les trois quarts obtiennent le diplôme ou abandonnent.
- Chaque année depuis sa création, on accepte 90 nouveaux étudiants en premier niveau.

L'année n , on note

- a_n le nombre d'étudiants dans le premier niveau,
- b_n le nombre d'étudiants dans le deuxième niveau,
- c_n le nombre d'étudiants qui ont quitté le cycle à la fin de l'année $n - 1$.

On note

$$\vec{x}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}.$$

- a) Montrer que les $\vec{x}_n$ vérifient la relation de récurrence $\vec{x}_n = A\vec{x}_{n-1} + \vec{b}$, où A est une matrice qu'on déterminera et $\vec{b} = \begin{bmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- b) Déterminer $\vec{x}_n$ en fonction de $\vec{x}_0 = \vec{b}$.
- c) Montrer que $\vec{x}_n$ se stabilise et calculer sa valeur.

Exercice 12.

Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes :

1. $y' + y = 2t^2 - t + 1$.
2. $y' - y = e^t(t + 1)$.

3. $y' + y \tan(t) = \cos^2(t)$.
4. $ty' - 2y = (t - 1)(t + 1)^3$.
5. $y' + y = \cos(2t)$.
6. $y' + 3y = t$.
7. $y' + ty = 2t$.
8. $y' + y \cos t = \cos t$.
9. $y' + \frac{2t}{1+t^2}y = t^3$.
10. $(t + 1)y' - ty = 0$.
11. $|t|y' + (t - 1)y = t^3$.

Exercice 13.

Résoudre l'équation différentielle : $y' = e^{x+y}$.

Exercice 14.

Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivants:

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = x - y, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -ax \\ y' = ax - by, \\ z' = by \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = -x + y + z + e^t \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z. \end{cases}$$

Déterminer la limite des solutions quand t tend vers l'infini en fonction des données initiales.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les données initiales pour que les solutions tendent vers 0 en l'infini.