

Feuille Analyse 4
Développements limités

Fonctions équivalentes.

Exercice 1

1. Montrer que $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ en 0.
2. Montrer que $\cos x \sim 1 - \frac{x^{2007}}{2007}$ en 0.
3. Montrer que $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ en 0.
4. A-t-on $1 - \cos x \sim \frac{x^{2007}}{2007}$ en 0 ?

Exercice 2

Peut-on dire que deux fonctions f et g équivalentes en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ vérifient $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = 0$?

Exercice 3

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ où $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Montrer que $e^f \sim e^g$ en a ssi $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = 0$.

En déduire que $f \sim g$ en a n'implique pas $e^f \sim e^g$ en a .

Exercice 4

Soient f et g deux fonctions à valeurs strictement positives définies sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ où $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

On suppose que g admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{1\}$ en a .

Montrer que si $f \sim g$ en a alors $\ln f \sim \ln g$ en a .

Ce résultat est-il vrai avec $\ell = 1$?

Exercice 5

Soient f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ où $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

On suppose que g_1 et g_2 sont à valeurs strictement positives.

Montrer que si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ en a alors $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ en a .

Exercice 6

Déterminer à l'aide de fonctions équivalentes les limites suivantes :

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(\ln(1+x) - \ln x), \quad (iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{4x^2 + 3x + 2} \sin \frac{1}{x},$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{3} x^2 \cos \frac{1}{x}, \quad (v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x},$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x).$$

Développements limités (d.l)

Exercice 7

Soient P et Q les deux polynômes suivants de $\mathbb{R}[X]$.

$$P = 1 + X - 2X^2 - 11X^3 + 134X^4 \quad Q = X + 5X^3 - 239X^4.$$

Montrer que le produit PQ admet un d.l. à l'ordre 2 en zéro et le déterminer.

Exercice 8

On se propose de déterminer le d.l de $\tan x$ en 0 à l'ordre n où $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer le d.l. à l'ordre 2 de $\tan x$ en 0.
2. En déduire le d.l. à l'ordre 2 de $1 + \tan^2 x$ en 0.
3. En déduire le d.l. à l'ordre 4 de $\tan x$ en 0, puis celui à l'ordre 6 de $1 + \tan^2 x$ en 0.
4. Expliquer comment on peut déterminer le d.l. à l'ordre $n + 2$ de $\tan x$ en 0 à partir du d.l. à l'ordre n de $\tan x$ en 0.

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $q \in \mathbb{R}$. Calculer $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.
2. En déduire le dl à l'ordre n de $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1+x^2}$ et de $\arctan x$ en 0.

Exercice 10

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. A l'aide du dl à l'ordre n de $(1+x)^\alpha$ en 0, déterminer le dl à l'ordre n en 0 des expressions suivantes :

$$\frac{1}{1+x}, \ln(1+x), \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \arctan x, \arccos x, \arcsin x.$$

Exercice 11

Déterminer les d.l en 0 à l'ordre n des expressions suivantes :

$$(i) 2^x \quad n = 3, \quad (ii) \sin x \left(\frac{1}{1-x} - e^x \right), \quad n = 5, \quad (iii) e^{\sin x} \quad n = 4,$$

$$(iv) \sqrt{\cos x} \quad n = 3, \quad (v) \frac{e^x}{\sqrt{1+x}} \quad n = 3, \quad (vi) \frac{1}{\cos x} \quad n = 5,$$

$$(vii) \tan x \quad n = 6, \quad (viii) \frac{e^x - 1}{\sin x} \quad n = 2.$$

Exercice 12

Montrer que $\ln x$ n'admet pas de d.l en 0.

Exercice 13

Soit $f :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{-1/x}$.

Montrer que f admet un d.l. à tout ordre n en 0 (à droite) que l'on déterminera. (On pourra déjà commencer par examiner le cas $n = 1$ et $n = 2$)

Exercice 14

Soit $f : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1 - x + 3x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x^2}$.

1. Montrer que f admet un d.l à l'ordre 2 en 0.

2. Montrer que f' n'admet pas de d.l en 0.

Exercice 15

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Montrer que f admet un d.l à l'ordre 2 en 0 mais n'admet pas de d.l à l'ordre 3 en 0.

Exercice 16

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x + x^2 + x^3 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Montrer que f admet un d.l à l'ordre 2 en 0.

f est-elle 2 fois dérivable au point 0 ?

Exercice 17

Déterminer les d.l des expressions suivantes :

1. $x^3 + 4x^2 + 5x - 10$ en 1 à l'ordre 2,
2. $\ln(x + x^2)$ en 1 à l'ordre 2,
3. $\ln(\tan x)$ en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.

Exercice 18

Déterminer les d.l en $+\infty$ à l'ordre 3 des expressions suivantes :

- (i) $\frac{\sqrt{x^4 - 10x^3 + 9x^2}}{x^2}$ (ii) $x - \sqrt{1 + x^2}$, (iii) $\ln\left(\frac{1+x^2}{(1+x)^2}\right)$, (iv) $\exp\left(1 + \sin \frac{1}{x}\right)$.

Exercice 19

Déterminer les limites quand x tend vers a des expressions suivantes :

- (i) $\frac{\cos 3x - 1}{\cos 2x - 1}$ $a = 0$, (ii) $\frac{1 - \cos x}{1 - (\sqrt{1 - x^2})^3}$ $a = 0$, (iii) $\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}$ $a = 0$,

- (iv) $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ $a = 0$, (v) $\sqrt{1 + x} - \sqrt{-1 + x}$ $a = +\infty$,

- (vi) $x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ $a = +\infty$, (vii) $\frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$, $a = 1$,

- (viii) $\left(\frac{b^x + c^x}{2}\right)^{1/x}$ où $b > 0$, $c > 0$ et $a = 0$.

Exercice 20

Etudier les asymptotes en l'infini et leur position par rapport à la courbe de

- (i) $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1} - \sin \frac{1}{x}$, (ii) $x \mapsto \frac{x^2}{x+1} e^{1/x}$.