

Devoir à la maison 1 La fonction logarithme

Dans ce problème on propose une "construction" de la fonction logarithme népérien¹. Elle est basée sur un résultat très important, parfois appelé théorème fondamental de l'analyse. Ce résultat est admis ici. Sa démonstration nécessite des outils qui ne seront développés qu'en deuxième année.

Théorème fondamental de l'analyse : Si f est une fonction continue sur un intervalle I , il existe une fonction dérivable F telle que $F' = f$.

1. Soit f une fonction continue sur l'intervalle I . On note $\mathcal{E}_f$ l'ensemble des fonctions F dérivables sur I et telles que $F' = f$.

- (a) Montrer que pour tout $F \in \mathcal{E}_f$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $F + \lambda \in \mathcal{E}_f$.
- (b) Montrer que si F et G sont dans $\mathcal{E}_f$ alors $F - G$ est un élément de $\mathcal{E}_0$.
- (c) Soit $a \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{E}_f \cap \{f \mid f(a) = \lambda\}$ est réduit à un point
- (d) Montrer qu'il existe une unique fonction F définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que $F(1) = 0$, et pour tout $x > 0$, $F'(x) = \frac{1}{x}$.

Cette fonction est le logarithme népérien. On la note désormais $\ln$.

2. (a) Montrer que la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- (b) En déduire que $\ln$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)[$.
3. Soit $a > 0$, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction φ_a , par la formule $\varphi_a(x) = \ln(ax)$.

- (a) Montrer que φ_a est dérivable et calculer sa dérivée.
 - (b) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a $\ln(ax) = \ln a + \ln x$.
 - (c) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$.
 - (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x > 0$ on a $\ln(x^n) = n \ln x$.
 - (e) Montrer enfin que pour tout $q \in \mathbb{Q}$ on a² $\ln x^q = q \ln x$
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'on a $\ln 2^n > 0$.
- (b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.
- (c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.
5. (a) Montrer que l'on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
- (b) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $\ln x \leq x - 1$.
- (c) En déduire que pour tout nombre rationnel q , et tout $x > 0$, on a : $\ln x \leq \frac{1}{q}(x^q - 1)$.
- (d) Montrer enfin que pour tout rationnel $q > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^q} = 0$.
- (e) En déduire que pour tout rationnel $q > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^q \ln x = 0$.

1. John Napier, en France Neper, né à Merchiston, près d'Édimbourg, en 1550 et mort le 4 avril 1617 au château de Merchiston, est un théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais.

2. On rappelle que pour tout entier $p > 0$, on note $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$, la fonction réciproque de l'application définie sur $[0, +\infty[$ par $x \mapsto x^p$. Par suite, si $q = \frac{n}{p}$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et $p > 0$ dans $\mathbb{N}$, on pose $x^q = (x^{\frac{1}{p}})^n$.