

Devoir à la maison 2

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \geq 2$. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ n éléments distincts de K . Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on pose

$$L_j = \frac{\prod_{k=1, k \neq j}^n (X - x_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^n (x_j - x_k)}.$$

On dit que L_j est le j -ème *polynôme d'interpolation de Lagrange* associé à $x_1, x_2, \dots, x_n$.

1. Déterminer le degré de L_j pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.
2. Calculer $L_j(x_l)$ pour tout $(j, l) \in \{1, \dots, n\}^2$.
3. Soient $P, Q \in K[X]$ de degré strictement inférieur à n . On suppose que $P(x_j) = Q(x_j)$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que $P = Q$.
4. Soit $P \in K[X]$. On définit le polynôme $L = \sum_{j=1}^n P(x_j)L_j$. Montrer que L est le reste dans la division euclidienne de P par $\prod_{k=1}^n (X - x_k)$.
5. Soit $P \in K[X]$ de degré strictement inférieur à n . Montrer que P s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$P = \sum_{j=1}^n \lambda_j L_j \quad \text{avec} \quad \lambda_j \in K.$$

6. Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ n points du plan $\mathbb{R}^2$ avec $x_1, x_2, \dots, x_n$ distincts. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré strictement inférieur à n et un seul tel que $P(x_j) = y_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.
7. Pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$ on pose $z_j = e^{i2\pi \frac{j}{n}}$.
 - (a) Quelle relation existe-t-il entre les z_j et le polynôme $X^n - 1$?
 - (b) Montrer que $\prod_{j=1}^{n-1} (X - z_j) = \sum_{j=0}^{n-1} X^j$ et en déduire la valeur de $\prod_{j=1}^{n-1} (1 - z_j)$.
 - (c) Calculer les polynômes d'interpolation de Lagrange $L_j \in \mathbb{C}[X]$ (où $j = 0, 1, \dots, n-1$) associés à $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$.
 - (d) Montrer que pour tout $j = 0, 1, \dots, n-1$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $|L_j(z)| \leq (|z| + 1)^{n-1}$.
 - (e) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré strictement inférieur à n . Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \leq \max_{|a|=1} |P(a)| (|z| + 1)^{n-1}.$$