

Devoir à la maison 4

Bézout et algèbre linéaire

Le but du problème est d'utiliser l'algèbre linéaire pour établir le théorème de Bezout sur les polynômes et quelques applications. Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $K_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

1. Déterminer la dimension de $K_n[X]$.

Soient $P, Q \in K[X]$ avec $m = \deg(P)$ et $n = \deg(Q)$ supérieurs ou égaux à 1. On définit l'application

$$f : K_{n-1}[X] \times K_{m-1}[X] \rightarrow K[X]$$

telle que $f(U, V) = UP + VQ$.

2. Montrer que f est linéaire.
3. Montrer que l'image de f est contenue dans $K_{m+n-1}[X]$.
4. Montrer que l'image de f est égale à $K_{m+n-1}[X]$ si et seulement si le noyau de f est réduit à $\{0\}$.
5. On suppose que P et Q sont premiers entre eux. Montrer que le noyau de f est réduit à $\{0\}$. En déduire qu'il existe un unique couple $(U_0, V_0) \in K_{n-1}[X] \times K_{m-1}[X]$ tel que $U_0P + V_0Q = 1$.
6. Réciproquement, on suppose qu'il existe $(U_0, V_0) \in K_{n-1}[X] \times K_{m-1}[X]$ tel que $U_0P + V_0Q = 1$. Montrer que P et Q sont premiers entre eux.
7. On écrit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m$ et $Q = b_0 + b_1X + \dots + b_nX^n$. Ecrire la matrice de f relative aux bases $((1, 0), (X, 0), \dots, (X^{n-1}, 0), (0, 1), (0, X), \dots, (0, X^{m-1}))$ de $K_{n-1}[X] \times K_{m-1}[X]$ et $(1, X, \dots, X^{m+n-1})$ de $K_{m+n-1}[X]$.
8. *Application.* En appliquant ce qui précède à $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^2 + X + 1$ et en calculant U_0, V_0 tels que $U_0P + V_0Q = 1$ par l'algorithme de la division euclidienne, montrer que la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est inversible et calculer A^{-1} .