

Examen
deuxième session

Durée 3 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1

- 1) Donner la solution générale $y = f(t)$ de l'équation différentielle linéaire homogène $y' + (1/t)y = 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- 2) Montrer que l'équation différentielle linéaire $y' + (1/t)y = 3t$ admet une solution particulière polynomiale.
- 3) Donner la solution générale de l'équation différentielle linéaire $y' + (1/t)y = 3t$.
- 4) Donner la solution de l'équation différentielle linéaire $y' + (1/t)y = 3t$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$.

Exercice 2

On considère l'équation de récurrence linéaire :

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \quad (*)$$

Une solution de $(*)$ est une suite de nombres complexes $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui vérifie $(*)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

- 1) Montrer qu'il existe deux solutions de la forme $(r^n)_{n \in \mathbf{N}}$ avec $r \in \mathbf{C}$ qu'on déterminera.
- 2) En utilisant un résultat du cours, donner la solution générale de $(*)$.
- 3) Montrer que toutes les solutions de $(*)$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini.

Exercice 3

- 1) Calculer l'intégrale : $\int_1^2 x^2 (\ln x) dx$.

- 2) On considère la fonction rationnelle $\frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6}$. Déterminer son domaine de définition et calculer une primitive sur chacun des intervalles où elle est définie.

Exercice 4

On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit u l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ telle que

$$u(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, x + 3y + z)$$

- 1) Montrer que u est une application linéaire et écrire sa matrice A dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
- 2) Déterminer une base du noyau de u .
- 3) Déterminer une base de l'image de u .
- 4) Vérifier que u satisfait bien le théorème du rang.

Exercice 5

Calculer le développement limité au point 1 à l'ordre 2 de $f(x) = \exp(x + x^2)$.

Exercice 6

On considère la fonction $f(x) = x \ln \left(2 + \frac{1}{x}\right)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

- 1) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

- 2) On pose $h = 1/x$ et $g(h) = \ln(2 + h)$. Calculer le développement limité de g au point 0 à l'ordre 2.

- 3) En déduire que le graphe de f admet une asymptote quand x tend vers $+\infty$. Préciser la position du graphe par rapport à cette asymptote.

Exercice 7

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour $f \in E$, on définit la fonction $T(f) = g$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.

- 1) Justifier que $T(f)$ est bien définie.
- 2) Justifier que $T(f)$ est une fonction dérivable.
- 3) Montrer que T est une application linéaire de E dans E .
- 4) Déterminer l'image de T
- 5) Déterminer le noyau de T .