

Examen
première session

Durée 3 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Le barème n'a qu'une valeur indicative

Exercice 1 (4 pts)

- 1) Ecrire le polynôme $P(X) = X^3 - 1$ comme produit de polynômes irréductibles sur $\mathbf{C}$, puis sur $\mathbf{R}$.
- 2) Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{C}$ de la fraction rationnelle $R(X) = \frac{1}{X^3 - 1}$.
- 3) Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ de la fraction rationnelle $R(X) = \frac{1}{X^3 - 1}$.
- 4) Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^3 - 1}$ admet une primitive. Calculer une primitive de f sur chacun de ces intervalles.

Exercice 2 (4 pts)

On considère les polynômes sur $\mathbf{R}$: $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $B = X^2 + X + 1$.

- 1) Calculer leur pgcd.
- 2) En déduire que A et B sont premiers entre eux.
- 3) Déterminer $U, V \in \mathbf{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

Exercice 3 (4 pts)

- 1) Calculer l'intégrale : $\int_1^2 x (\ln x) dx$.
- 2) Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx$.

Exercice 4 (8 pts)

On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit u l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ telle que

$$u(x, y, z) = (x + y - z, -4x - y + 2z, -2x + y)$$

- 1) Justifier rapidement que u est une application linéaire. Ecrire la matrice A de u dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
- 2) Déterminer une base du noyau de u .
- 3) En utilisant le théorème du rang, calculer la dimension de l'image de u .
- 4) Montrer que la première colonne de A est une combinaison linéaire des deux autres colonnes. En déduire une base de l'image de u .
- 5) On définit les vecteurs suivants de $\mathbf{R}^3$: $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$. Montrer que $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
- 6) Calculer $u(\vec{f}_1)$, $u(\vec{f}_2)$ et $u(\vec{f}_3)$.
- 7) En déduire la matrice B de u dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.
- 8) Ecrire la matrice P du changement de base de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.
- 9) Ecrire la relation vue en cours qui lie les matrices A , B et la matrice du changement de base P .
- 10) Calculer P^{-1} . Vérifier la relation donnée dans la question 9.

Exercice 5 (4 pts)

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.

- 1) Déterminer son domaine.
- 2) Déterminer, en utilisant les propriétés de la fonction $\ln$, les limites suivantes :
 - a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 3) Montrer que $\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 et le calculer.
- 4) En déduire que $f(x)$ admet une limite quand x tend vers 0 et calculer cette limite.