

Examen

Durée 3 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1

- 1) Donner la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène $y' - ty = 0$.
- 2) Montrer que l'équation différentielle linéaire $y' - ty = t$ admet une solution particulière constante.
- 3) Donner la solution générale de l'équation différentielle linéaire $y' - ty = t$.
- 4) Donner la solution de l'équation différentielle linéaire $y' - ty = t$ qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 2

On considère l'équation de récurrence linéaire :

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \quad (*)$$

Une solution de $(*)$ est une suite $\vec{u} = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui vérifie $(*)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

- 1) Montrer que l'ensemble E des solutions de $(*)$ est un espace vectoriel.
- 2) Montrer que l'application φ de $\mathbf{R}^2$ dans E qui associe à $(x_0, x_1) \in \mathbf{R}^2$ la solution (u_n) avec $u_0 = x_0$ et $u_1 = x_1$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur E . Quelle est la dimension de l'espace vectoriel E ?
- 3) Montrer qu'il existe une solution de la forme $\vec{v} = (v_n = r^n)$ avec $r \in \mathbf{R}$ qu'on déterminera et une autre de la forme $\vec{w} = (w_n = nr^n)$.
- 4) Montrer en utilisant l'application φ que $(\vec{v}, \vec{w})$ est une base de E .
- 5) Donner la solution générale de $(*)$ à l'aide de la base $(\vec{v}, \vec{w})$.
- 6) Donner la solution de $(*)$ qui vérifie la condition initiale $u_0 = u_1 = 1$.

Exercice 3

On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit u l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ telle que

$$u(x, y, z) = (x + y - z, 4x + y - 2z, 6x + 3y - 4z)$$

- 1) Montrer que u est une application linéaire et écrire sa matrice A dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
- 2) Déterminer une base de $\text{Ker } u$.
- 3) En utilisant le théorème du rang, déterminer la dimension de $\text{Im } u$.
- 4) Montrer que les vecteurs $\vec{f}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ et $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$ appartiennent à $\text{Im } u$ et que $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ est une base de $\text{Im } u$.
- 5) On pose $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$. Montrer que $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
- 6) Calculer $u(\vec{f}_1)$, $u(\vec{f}_2)$ et $u(\vec{f}_3)$.
- 7) En déduire la matrice B de u dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.
- 8) En déduire que l'on a $u \circ u = -u$.

Exercice 4

Calculer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 5 de $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

Exercice 5

- 1) Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \arctan x \, dx$.
- 2) Calculer la primitive : $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$.

Exercice 6

On considère la fonction $f(x) = (x - 1) \exp\left(\frac{1}{x^3 - 3x + 2}\right)$.

- 1) Déterminer son domaine.
- 2) Déterminer les limites suivantes :
 - a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
- 3) Calculer le développement limité en $u = 1/x$ à l'ordre 3 de $\exp\left(\frac{1}{x^3 - 3x + 2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.
- 4) En déduire que le graphe de f admet une asymptote quand x tend vers $+\infty$. Préciser la position du graphe par rapport à cette asymptote.

Exercice 7

On définit $f, g : \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}[X]$ par $f(P) = P'$ et $g(P) = XP(X)$.

- 1) Montrer que f et g sont des applications linéaires.
- 2) Montrer que $f \circ g - g \circ f = I$, où I est l'application identique $P \mapsto P$ de $\mathbf{R}[X]$.
- 3) Montrer que f est surjective mais n'est pas injective. Déterminer son noyau.
- 4) Montrer que g est injective mais n'est pas surjective. Déterminer son image.
- 5) On note $\mathbf{R}_n[X] = \{P \in \mathbf{R}[X] : \deg(P) \leq n\}$. Montrer que la restriction de f à $\mathbf{R}_n[X]$ définit une application linéaire $f_n : \mathbf{R}_n[X] \rightarrow \mathbf{R}_{n-1}[X]$. Donner la matrice A_3 de f_3 relativement aux bases $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbf{R}_3[X]$ et $(1, X, X^2)$ de $\mathbf{R}_2[X]$.
- 6) Montrer que la restriction de g à $\mathbf{R}_n[X]$ définit une application linéaire $g_n : \mathbf{R}_n[X] \rightarrow \mathbf{R}_{n+1}[X]$. Donner la matrice B_2 de g_2 relativement aux bases $(1, X, X^2)$ de $\mathbf{R}_2[X]$ et $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbf{R}_3[X]$.