

Examen
deuxième session

Durée 3 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1

- 1) Ecrire le polynôme $P(X) = X^3 + 1$ comme produit de polynômes irréductibles sur $\mathbf{C}$, puis sur $\mathbf{R}$.
- 2) Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ de la fraction rationnelle $R(X) = \frac{1}{X^3 + 1}$.
- 3) Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^3 + 1}$ admet une primitive. Calculer une primitive de f sur chacun de ces intervalles.

Exercice 2

On considère les polynômes sur $\mathbf{R}$: $A = X^4 + X^3 - 2X^2 - 3X - 2$ et $B = X^3 + X^2 - X - 1$.

- 1) Calculer leur pgcd.
- 2) En déduire que A et B sont premiers entre eux.
- 3) Déterminer $U, V \in \mathbf{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

Exercice 3

- 1) Justifier que l'intégrale $\int_0^1 \arcsin x \, dx$ existe et la calculer.
 - 2) Sur quels intervalles la fonction $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ admet-elle des primitives ?
- Calculer une primitive $\int \frac{1}{e^x - 1} \, dx$ sur ces intervalles.

Exercice 4

On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit u l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ telle que

$$u(x, y, z) = (-2x + 6y - 4z, x - 3y + 2z, x - 3y + 2z)$$

- 1) Justifier rapidement que u est une application linéaire. Ecrire la matrice A de u dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
- 2) Montrer que u est de rang 1 et déterminer une base de l'image de u .
- 3) En utilisant le théorème du rang, calculer la dimension du noyau de u .
- 4) Déterminer une base du noyau de u .
- 5) On définit les vecteurs suivants de $\mathbf{R}^3$: $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -5\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$. Montrer que $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
- 6) Calculer $u(\vec{f}_1)$, $u(\vec{f}_2)$ et $u(\vec{f}_3)$.
- 7) En déduire la matrice B de u dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.
- 8) Ecrire la matrice P du changement de base de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.
- 9) Ecrire la relation vue en cours qui lie les matrices A , B et la matrice du changement de base P .
- 10) Calculer P^{-1} . Vérifier la relation donnée dans la question 9.

Exercice 5

On considère la fonction $f(x) = (x + 1) \exp\left(\frac{1}{x^2 - x - 2}\right)$.

- 1) Déterminer son domaine.
- 2) Déterminer les limites suivantes :
 - a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.
- 3) Calculer le développement limité en $u = 1/x$ à l'ordre 2 de $\exp\left(\frac{1}{x^2 - x - 2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.
- 4) En déduire que le graphe de f admet une asymptote quand x tend vers $+\infty$. Préciser la position du graphe par rapport à cette asymptote.