

Examen Partiel

Exercice 1

On considère les deux polynômes suivants :

$$A(X) = X^4 + 4X^3 + X^2 - 16 \quad \text{et} \quad B(X) = X^3 + 3X^2 - 3X + 4.$$

- 1) Calculer $D = \text{PGCD}(A, B)$.
- 2) Déterminer deux polynômes U et V tels que $D = UA + VB$.

Exercice 2

On considère les deux polynômes suivants :

$$A(X) = 1 - 2X + X^3 + X^4 \quad \text{et} \quad B(X) = 1 + X + X^2.$$

- 1) Diviser suivant les puissances croissantes A par B à l'ordre 2.
- 2) En déduire la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ de

$$\frac{1 - 2X + X^3 + X^4}{X^3(1 + X + X^2)}.$$

Exercice 3

On considère

$$f(x) = \arctan(x+1) - \arctan x \quad \text{et} \quad g(x) = \arctan \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

- 1) Déterminer le domaine des fonctions f et g .
- 2) Montrer que f et g sont dérivables. Calculer leur dérivées.
- 3) En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = g(x)$.

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

- 1) $\int_0^1 x \arctan x \, dx$.
- 2) $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} dt$.

Exercice 5

On considère la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{4X^3}{X^4 - 4X^2 + 4} \quad .$$

- 1) Factoriser le polynôme $X^4 - 4X^2 + 4$ en un produit de facteurs irréductibles sur $\mathbf{R}$.
- 2) Donner la forme de la décomposition en éléments simples de $R(X)$ sur $\mathbf{R}$. Calculer les coefficients de cette décomposition.
- 3) Sur quels domaines de $\mathbf{R}$ la fonction $x \mapsto R(x)$ admet-elle une primitive ?
- 4) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto R(x)$ sur chacun des domaines déterminés dans la question précédente.