

Examen Partiel

Mardi 16 mars

Durée 2 heures

L'usage de tout document et de tout matériel électronique (ordinateur, calculatrice, téléphone portable...) est interdit. La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1

On considère les deux polynômes suivants de $\mathbf{R}[X]$:

$$A(X) = X^3 \quad \text{et} \quad B(X) = X^2 + X + 2.$$

1. Justifier que A et B sont premiers entre eux.
2. En utilisant l'algorithme de la division euclidienne, déterminer deux polynômes U et V tels que

$$8 = UA + VB \quad \text{avec} \quad \deg(U) \leq 1 \text{ et } \deg(V) \leq 2.$$

3. En déduire la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{X^3(X^2 + X + 2)}.$$

Exercice 2

On considère le polynôme $B(X) = 2 + X + X^2$ de $\mathbf{R}[X]$:

1. Diviser suivant les puissances croissantes le polynôme 1 par B à l'ordre 2.
2. En déduire la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{X^3(2 + X + X^2)}.$$

Exercice 3

On considère la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{4X^3 + 2X}{X^4 + X^2 + 1}.$$

1. Factoriser le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ en un produit de facteurs irréductibles sur $\mathbf{C}$, puis sur $\mathbf{R}$.
2. Donner la forme de la décomposition en éléments simples de $R(X)$ sur $\mathbf{R}$.
3. Calculer les coefficients de cette décomposition.

Tourner la page s'il vous plaît

Exercice 4

On considère les fonctions $f : x \mapsto x - \operatorname{Arctan}(\ln x)$ et $u : x \mapsto x(1 + (\ln x)^2)$ définies sur $]0, +\infty[$.

1. Justifier que ces deux fonctions sont infiniment dérivables sur $]0, +\infty[$.
2. (a) Calculer les limites de u en 0^+ et en $+\infty$. Montrer que u se prolonge par continuité sur $[0, +\infty[$.
(b) Calculer la dérivée de u sur $]0, +\infty[$.
(c) Montrer que le graphe du prolongement de u à $[0, +\infty[$ admet en 0^+ une tangente verticale.
(d) Dresser le tableau des variations de u sur $[0, +\infty[$.
(e) Montrer que l'équation $u(x) = 1$ admet une unique solution que l'on déterminera. On la note α .
3. (a) Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. En déduire que f se prolonge par continuité sur $[0, +\infty[$.
(b) Calculer la dérivée de f sur $]0, +\infty[$ et exprimer la en fonction de u .
(c) Dresser le tableau des variations de f sur $[0, +\infty[$.
(d) Montrer que f est une bijection de $I_1 = [0, \alpha]$ dans $I_2 = [\alpha, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)]$.
4. (a) Soit $x < y < \alpha$. À l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à f sur $[x, y]$, montrer que

$$f'(x) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f'(y).$$

- (b) En déduire que pour tout $y < \alpha$ on a

$$\frac{f(y) - \frac{\pi}{2}}{y} \leq f'(y).$$

- (c) Montrer enfin que le graphe du prolongement de f à $[0, +\infty[$ admet en 0^+ une tangente verticale.

5. On note g la fonction réciproque de $f : I_1 \rightarrow I_2$. Donner le domaine de dérivabilité de g .