

POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

1. L'algèbre des polynômes et divisions

1. 1. L'algèbre des polynômes

Définition. Soit $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Un polynôme à coefficients dans K est un élément de la forme

$$P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n = \sum_{i=0}^n a_iX^i$$

où $n \in \mathbf{N}$ et les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des éléments de K . Le symbole X est appelé l'indéterminée (on pose $X^0 = 1$). On note

$$K[X] = \{ \text{polynômes à coefficients dans } K \}.$$

On identifie K à un sous-ensemble de $K[X]$. Le degré de P , noté $\deg(P)$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. Par convention, $\deg(0) = -\infty$.

On définit sur $K[X]$ les opérations suivantes :

- l'addition

$$(a_0 + a_1X + \dots) + (b_0 + b_1X + \dots) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \dots$$

- la multiplication scalaire : pour $\lambda \in K$,

$$\lambda(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1X + \dots + \lambda a_nX^n.$$

- le produit

$$\left(\sum_{i=0}^m a_iX^i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_jX^j \right) = \sum_{k=0}^{m+n} c_kX^k \quad \text{où} \quad c_k = \sum_{i=0}^k a_ib_{k-i}.$$

Proposition. Soient $P, Q \in K[X]$. Alors $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ et $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Théorème. Muni des opérations ci-dessus, $K[X]$ est une algèbre commutative sur K .

1.2. Divisions suivant les puissances décroissantes

Théorème (division euclidienne). Soient A et B deux polynômes avec B non nul. Alors il existe deux polynômes Q et R uniques tels que $A = QB + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$. Le polynôme Q s'appelle le quotient et le polynôme R s'appelle le reste de la division euclidienne de A par B .

1.3. Théorie de la divisibilité

Définition. On dit qu'un polynôme non nul D divise P (ou est un diviseur de P) si le reste de la division euclidienne de P par D est 0 : on a $P = QD$. On dit qu'un diviseur de P est trivial s'il est de la forme ou bien λP ou bien λ avec λ scalaire non nul.

Définition. On dit qu'un polynôme P est irréductible si $\deg(P) \geq 1$ et tous les diviseurs de P sont triviaux.

Théorème. Soient A et B deux polynômes non nuls. Alors il existe un polynôme C tel que tout polynôme qui divise A et B divise aussi C . On dit que C est un PGCD de A et B et on écrit $C = \text{PGCD}(A, B)$. Tous les PGCD de A et B sont de la forme λC où λ est un scalaire non nul.

Théorème (Bézout). Soient A et B deux polynômes non nuls. Alors il existe deux polynômes U et V tels que $\text{PGCD}(A, B) = UA + VB$.

Définition. On dit que deux polynômes A et B sont premiers entre eux si leur PGCD vaut 1.

Corollaire (Gauss). Soient A, B, C des polynômes non nuls. Si A divise BC et si A et B sont premiers entre eux, alors A divise C .

Corollaire. Soient A et B deux polynômes premiers entre eux. Alors il existe deux polynômes U, V uniques tels que $\deg(U) < \deg(B), \deg(V) < \deg(A)$ et $1 = UA + VB$.

1.4. Divisions suivant les puissances croissantes

Théorème. (divisions suivant les puissances croissantes à l'ordre k) Soient A et B deux polynômes avec b_0 (terme de degré 0) non nul et $k \in \mathbf{N}$. Alors il existe deux polynômes Q et R uniques tels que $A = QB + X^{k+1}R$ et $\deg(Q) \leq k$.

2. Théorème de d'Alembert-Gauss et factorisation

2.1. Le problème de la factorisation

Théorème (factorisation). Tout polynôme de degré ≥ 1 peut être écrit comme un produit de polynômes irréductibles.

2.2. Racines et le théorème de d'Alembert-Gauss

Définition. On dit que $a \in K$ est racine de $P \in K[X]$ si $P(a) = 0$.

Proposition. Un scalaire a est racine d'un polynôme P si et seulement si $X - a$ divise P . On appelle multiplicité de la racine a le plus grand entier n tel que $(X - a)^n$ divise P .

Proposition. Un polynôme de degré n a au plus n racines comptées avec leur multiplicité.

Théorème (Alembert-Gauss)(admis). Tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré ≥ 1 admet au moins une racine.

Corollaire. Tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ peut être écrit $P(X) = \lambda(X - a_1) \dots (X - a_n)$, où $\lambda, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$. Alors, $a_1, \dots, a_n$ sont les racines de P comptées avec leur multiplicité.

Corollaire. Les polynômes irréductibles dans $\mathbf{C}$ sont les polynômes de degré 1.

2.3. Factorisation dans $\mathbf{R}[X]$

Proposition. Soit $a \in \mathbf{C}$ une racine de $P \in \mathbf{R}[X]$. Alors $\bar{a}$ est aussi une racine de P .

Théorème. Les polynômes irréductibles dans $\mathbf{R}$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est < 0 .

3. Fractions rationnelles et éléments simples

3.1. Le corps des fractions rationnelles

Définition. Soit $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Une fraction rationnelle à coefficients dans K est un élément de la forme P/Q où $P, Q \in K[X]$ et $Q \neq 0$. Par définition, si $D \in K[X]$ est non nul, on peut simplifier par D , de sorte que $PD/QD = P/Q$. On note

$$K(X) = \{ \text{fractions rationnelles à coefficients dans } K \}.$$

On identifie $K[X]$ à un sous-ensemble de $K(X)$ en identifiant P à $P/1$.

On définit sur $K(X)$ les opérations suivantes :

- l'addition

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}.$$

- le produit

$$\frac{P_1}{Q_1} \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}.$$

Théorème. Muni de l'addition et du produit, $K(X)$ est un corps, c'est-à-dire tout élément non nul est inversible.

3.2. Décomposition en éléments simples

Définition. On dit qu'une fraction rationnelle $R \in K(X)$ est un élément simple si $R = P/Q^n$ où Q est un polynôme irréductible, n est un entier ≥ 1 et $\deg(P) < \deg(Q)$.

Théorème (admis). Soit $R = P/Q$ une fraction rationnelle telle que $\deg(P) < \deg(Q)$. Alors R peut-être écrite comme une somme d'éléments simples. Les éléments simples de cette décomposition sont de la forme $P_{i,j}/Q_i^j$ où Q_i est irréductible et Q_i^j divise Q .

3.3. Décomposition en éléments simples sur $\mathbf{C}$

Comme les polynômes irréductibles sur $\mathbf{C}$ sont les polynômes de degré 1, les éléments simples sur $\mathbf{C}$ sont de la forme

$$\frac{\lambda}{(X - a)^n},$$

où $\lambda, a \in \mathbf{C}$ et n est un entier ≥ 1 .

3.4. Décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$

Les éléments simples sur $\mathbf{R}$ sont de la forme

$$\frac{\lambda}{(X - a)^n},$$

où $\lambda, a \in \mathbf{R}$ et n est un entier ≥ 1 ou de la forme

$$\frac{\lambda X + \mu}{(aX^2 + bX + c)^n},$$

où $\lambda, \mu, a, b, c \in \mathbf{R}$, n est un entier ≥ 1 et $b^2 - 4ac < 0$.