

ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

1. Définition et exemples d'espaces vectoriels

1.1. La structure d'espace vectoriel

Définition. Soit $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Un espace vectoriel sur K est un ensemble E muni de deux opérations : l'addition et la multiplication scalaire

$$\begin{array}{ll} E \times E \rightarrow E & K \times E \rightarrow E \\ (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} + \vec{y} & (\lambda, \vec{x}) \mapsto \lambda \vec{x} \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- a) $(E, +)$ est un groupe abélien
 - i) $\vec{y} + \vec{x} = \vec{x} + \vec{y}$ (commutativité)
 - ii) $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (associativité)
 - iii) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ (existence d'un élément nul $\vec{0}$)
 - iv) $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ (existence d'un opposé $-\vec{x}$)
- b) K opère dans E en respectant l'addition
 - v) $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$
 - vi) $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$
 - vii) $(\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$
 - viii) $\lambda\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \vec{x} = \vec{0}$

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés des *vecteurs*.

Exemples d'espaces vectoriels

$$K^n, K^I = \{(x_i)_{i \in I}, x_i \in K\},$$

$$K^{(I)} = \{(x_i)_{i \in I}, x_i \in K, x_i = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } i\}$$

$$K[X] = \{\text{polynômes à coefficients dans } K\}$$

$$K_n[X] = \{P \in K[X] : \deg(P) \leq n\}$$

$$\mathcal{C}(I, \mathbf{R}) = \{f : I \rightarrow \mathbf{R} \text{ continue}\}$$

L'ensemble des solutions de la relation de récurrence linéaire

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

L'ensemble des solutions du système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' &= 2x - y \\ y' &= x - y \end{cases}$$

1.2. Combinaisons linéaires

Définition. Soit $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de l'espace vectoriel E . Une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille est un vecteur de la forme $\vec{x} = \sum_I \lambda_i \vec{x}_i$ où $\lambda_i \in K$ et $\lambda_i = 0$ sauf pour un nombre fini de i (si I est finie, cette condition est superflue!).

Une équation $\sum_I \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}$ s'appelle une *relation linéaire*. On dit que la relation linéaire est *triviale* si $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$.

1.3. Sous-espaces vectoriels

Définition. Soit E un espace vectoriel sur K . On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si F est non vide et

- (i) F est stable par l'addition : $\vec{x}, \vec{y} \in F \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in F$;
- (ii) F est stable par la multiplication scalaire : $\lambda \in K, \vec{x} \in F \Rightarrow \lambda \vec{x} \in F$.

Exemples

Une droite du plan $\mathbf{R}^2$ passant par l'origine.

Un plan de l'espace $\mathbf{R}^3$ contenant l'origine.

$K_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $K[X]$.

Proposition. Soit A une partie d'un espace vectoriel E .

- (i) Il existe un plus petit sous-espace vectoriel qui contient A ;
- (ii) ce sous-espace vectoriel est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A .

Définition. Le sous-espace vectoriel ci-dessus est appelé le sous-espace vectoriel engendré par A . On le note $\text{vect}(A)$.

2. Applications linéaires

2.1. Définitions et exemples

Définition. Soient E, F des espaces vectoriels sur K . On dit qu'une application $u : E \rightarrow F$ est linéaire si

- (i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad u(\vec{x} + \vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y})$;
- (ii) $\forall \lambda \in K, \forall \vec{x} \in E \quad u(\lambda \vec{x}) = \lambda u(\vec{x})$.

Exemple L'intégrale $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est une application linéaire de l'espace vectoriel E des fonctions admettant une primitive sur $[a, b]$ à valeurs dans $F = \mathbf{R}$.

Définition. Soient E, F des espaces vectoriels sur K .

- (i) Un endomorphisme est une application linéaire $u : E \rightarrow E$;
- (ii) Une forme linéaire est une application linéaire $u : E \rightarrow K$;
- (iii) Un isomorphisme est une application linéaire bijective $u : E \rightarrow F$; si $F = E$, on dit que u est un automorphisme.

Notation

$$\begin{aligned} L(E, F) &= \{u : E \rightarrow F \text{ linéaire}\} \\ L(E) &= L(E, E) \\ E^* &= L(E, K) \quad \text{s'appelle le dual de } E \end{aligned}$$

Proposition. Soient E, F, G des espaces vectoriels sur K .

- (i) $u, v \in L(E, F), \lambda \in K \Rightarrow u + v, \lambda u \in L(E, F)$;
- (ii) $u \in L(E, F), v \in L(F, G) \Rightarrow v \circ u \in L(E, G)$;
- (iii) $u \in L(E, F)$ bijective $\Rightarrow$ application réciproque $u^{-1} \in L(F, E)$.

2.2. Noyau et image

Définition. Soit $u : E \rightarrow F$ linéaire. On définit

- (i) le noyau de $u = \text{Ker } u = u^{-1}(0) = \{\vec{x} \in E : u(\vec{x}) = \vec{0}\}$;
- (ii) l'image de $u = \text{Im } u = u(E) = \{\vec{y} \in F : \exists \vec{x} \in E : \vec{y} = u(\vec{x})\}$.

Proposition. Soit $u : E \rightarrow F$ linéaire.

- (i) Le noyau $\text{Ker } u$ de u est un sous-espace vectoriel de E ;
- (ii) L'image $\text{Im } u$ de u est une sous-espace vectoriel de F .

Proposition. Soit $u : E \rightarrow F$ linéaire.

- (i) u est injective si et seulement si $\text{Ker } u = \{\vec{0}\}$;
- (ii) u est surjective si et seulement si $\text{Im } u = F$.

3. Familles de vecteurs

Soit E un espace vectoriel sur K . Etant donné un ensemble I , une famille de vecteurs indexée par I est une application de I dans E qui associe à $i \in I$ un vecteur $\vec{x}_i \in E$. On note cette famille $\mathcal{F} = (\vec{x}_i)_{i \in I}$.

Proposition. Soit $\mathcal{F} = (\vec{x}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . Alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{F}} : K^{(I)} &\rightarrow E \\ (\lambda_i)_{i \in I} &\mapsto \sum_{i \in I} \lambda_i \vec{x}_i \end{aligned}$$

est une application linéaire. On dira que $\varphi_{\mathcal{F}}$ est l'application linéaire définie par la famille $\mathcal{F}$.

Définition. Soient $\mathcal{F} = (\vec{x}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E et $\varphi_{\mathcal{F}} : K^{(I)} \rightarrow E$ l'application linéaire associée. On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{x}_i)_{i \in I}$ est

- (i) génératrice si $\varphi_{\mathcal{F}}$ est surjective ;
- (ii) libre si $\varphi_{\mathcal{F}}$ est injective ;
- (iii) une base si $\varphi_{\mathcal{F}}$ est bijective.

$(\vec{x}_i)_{i \in I}$ génératrice $\Leftrightarrow$ tout $\vec{x} \in E$ est combinaison linéaire des x_i ;

$(\vec{x}_i)_{i \in I}$ libre $\Leftrightarrow$ toute relation linéaire des x_i est triviale ;

$(\vec{x}_i)_{i \in I}$ base $\Leftrightarrow$ tout $\vec{x} \in E$ s'écrit de manière unique $\vec{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i \vec{x}_i$.

Proposition. Soient $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E et $u : E \rightarrow F$ linéaire

- (i) si $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ est génératrice et u est surjective, alors $(u(\vec{x}_i))_{i \in I}$ est génératrice ;
- (ii) si $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ est libre et u est injective, alors $(u(\vec{x}_i))_{i \in I}$ est libre ;
- (iii) si $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ est une base et u est bijective, alors $(u(\vec{x}_i))_{i \in I}$ est une base.

Soit $J \subset I$. On dit que $(\vec{x}_i)_{i \in J}$ est une sous-famille de $(\vec{x}_i)_{i \in I}$.

Proposition.

- (i) une sous-famille d'une famille libre est libre ;
- (ii) une famille qui contient une sous-famille génératrice est génératrice.

Théorème (de la base incomplète). Toute famille libre est une sous-famille d'une base.

4. Sommes directes et projections

Définition. On dit qu'un espace vectoriel E est somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G si

- (i) $F \cap G = \{\vec{0}\}$;
- (ii) $F + G (= \{\vec{y} + \vec{z} : \vec{y} \in F, \vec{z} \in G\}) = E$.

On écrit alors $E = F \oplus G$.

Proposition. On a $E = F \oplus G$ si et seulement tout $\vec{x} \in E$ s'écrit d'une manière et une seule sous la form $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G$.

Définition. On dit que $P \in L(E)$ est une projection si $P^2 (= P \circ P) = P$.

Théorème. Soit E un espace vectoriel E .

- (i) Soit $E = F \oplus G$ une décomposition en somme directe. On définit $P : E \rightarrow E$ par $P(\vec{x}) = \vec{y}$ où $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ est la décomposition de $\vec{x}$ avec $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G$. Alors P est une projection telle que $\text{Im } P = F$ et $\text{Ker } P = G$.
- (ii) Réciproquement, soit $P \in L(E)$ une projection. On pose $F = \text{Im } P$ et $G = \text{Ker } P$. Alors $E = F \oplus G$.

Définition. On dit qu'un sous-espace vectoriel G est un sous-espace vectoriel supplémentaire d'un espace vectoriel F si $E = F \oplus G$.

Théorème. Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E admet au moins un sous-espace vectoriel supplémentaire.