

ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Comme dans les chapitres précédents, $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Espaces vectoriels de dimension finie

1.1. Définition de la dimension

Définition. On dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

Théorème (de la base incomplète). Soient $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ une famille libre et $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_q)$ une famille génératrice d'un espace vectoriel E . Alors il existe $n \geq p$ et une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E telle que

$$\vec{e}_i = \vec{x}_i \text{ pour } i = 1, \dots, p$$

$$\vec{e}_i \in \{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_q\} \text{ pour } i = p + 1, \dots, n.$$

Théorème. Soit $u : K^m \rightarrow K^n$ linéaire.

- (i) u injective $\Rightarrow m \leq n$;
- (ii) u surjective $\Rightarrow m \geq n$;
- (iii) u bijective $\Rightarrow m = n$.

Théorème. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors

- (i) E possède des bases ;
- (ii) toutes les bases de E ont le même nombre fini d'éléments.

Définition. La dimension d'un espace vectoriel de dimension finie est le nombre d'éléments d'une base de E . On la note $\dim(E)$

Corollaire. Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

Théorème. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

- (i) Si $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est une famille libre de E , alors $p \leq n$. On a $p = n$ si et seulement si c'est une base ;
- (ii) Si $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_q)$ est une famille génératrice de E , alors $q \geq n$. On a $q = n$ si et seulement si c'est une base.

Théorème. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$; on a l'égalité si et seulement si $F = E$.

Théorème. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si $E = F \oplus G$, où F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

1.2. Applications linéaires en dimension finie

Définition. Soient E, F des espaces vectoriels et $u : E \rightarrow F$ linéaire. On dit que u est de rang fini si $\text{Im } u$ est de dimension finie. On définit alors le rang de u comme $\text{rang}(u) = \dim(\text{Im } u)$.

Si F est de dimension finie, u est automatiquement de rang fini. Mais c'est aussi le cas si E est de dimension finie, comme le montre le résultat suivant.

Théorème (du rang). Soient E, F des espaces vectoriels et $u : E \rightarrow F$ linéaire. On suppose que E est de dimension finie. Alors u est de rang fini et

$$\text{rang}(u) = \dim(E) - \dim(\text{Ker } u)$$

Théorème. Soient E et F des espaces vectoriels de même dimension finie et $u : E \rightarrow F$ linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est injective ;
- (ii) u est surjective ;
- (iii) u est bijective.

2. Applications linéaires et matrices

2.1. Algèbre matricielle

Définition. Une matrice de type (m, n) (ou à m lignes et n colonnes) à coefficients dans K est une famille d'éléments de K indexée par $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$. On l'écrit

$$(a_{i,j})_{\{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

On note $M_{m,n}(K)$ l'ensemble des matrices de type (m, n) à coefficients dans K . Si $m = n$, on écrit $M_n(K)$ plutôt que $M_{n,n}(K)$.

On définit les opérations suivantes :

- (i) l'addition des matrices : $M_{m,n}(K) \times M_{m,n}(K) \rightarrow M_{m,n}(K)$

$$(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j})$$

- (ii) la multiplication scalaire : $K \times M_{m,n}(K) \rightarrow M_{m,n}(K)$

$$\lambda(a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j}).$$

- (iii) le produit de matrices : $M_{m,n}(K) \times M_{n,p}(K) \rightarrow M_{m,p}(K)$

$$(a_{i,j})(b_{j,k}) = (c_{i,k}) \quad \text{où} \quad c_{i,k} = \sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,k}.$$

Proposition.

- (i) $M_{m,n}(K)$ est un espace vectoriel sur K de dimension mn .
- (ii) $M_n(K) = M_{n,n}(K)$ est une algèbre.

2.2. L'écriture matricielle d'une application linéaire**Proposition.**

- (i) $M_{n,1}(K)$, qui est l'espace vectoriel des vecteurs-colonne, s'identifie à K^n .
- (ii) $M_{m,n}(K)$ s'identifie à $L(K^n, K^m)$.

On identifie $(a_{i,j}) \in M_{m,n}(K)$ à l'application linéaire $(x_j) \mapsto (y_i) = (a_{i,j})(x_j)$. On note $[u] = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(K)$ la matrice de $u \in L(K^n, K^m)$. Soit $(\vec{e}_j)$ [resp. $(\vec{f}_i)$] la base canonique de K^n [resp. K^m]. On a $a_{i,j} = \langle \vec{f}_i, u(\vec{e}_j) \rangle$. La j -ème colonne de la matrice $[u]$ est le vecteur-colonne $u(\vec{e}_j)$. On a :

- (i) $[u + v] = [u] + [v]$ pour $u, v \in L(K^n, K^m)$.
- (ii) $[\lambda u] = \lambda[u]$ pour $\lambda \in K$ et $u \in L(K^n, K^m)$.
- (iii) $[v \circ u] = [v][u]$ pour $u \in L(K^p, K^n)$ et $v \in L(K^n, K^m)$.

Définition. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base d'un espace vectoriel E . Soit $\vec{x} \in E$; on note $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = (x_j)$ le vecteur-colonne de K^n tel que $\vec{x} = \varphi_{\mathcal{B}}([\vec{x}]_{\mathcal{B}}) = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$. On dit que $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ est le vecteur des coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Définition. Soient E, F des espaces vectoriels et $u \in L(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m)$ une base de F . On définit $[u]_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = \varphi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ u \circ \varphi_{\mathcal{B}} \in L(K^n, K^m)$ qu'on identifie à une matrice $[u]_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} \in M_{m,n}(K)$. On dit que $[u]_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$ est la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Lorsque $F = E$ et $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, on dit que $[u]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Le diagramme suivant illustre cette définition :

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{u} & F \\
 \uparrow \varphi_{\mathcal{B}} & & \uparrow \varphi_{\mathcal{C}} \\
 K^n & \xrightarrow{[u]_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}} & K^m
 \end{array}$$

Proposition. La j -ème colonne de $[u]_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$ est le vecteur-colonne des coordonnées de $u(\vec{e}_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Théorème. Soient $(E, \mathcal{B}), (F, \mathcal{C}), (G, \mathcal{D})$ des espaces vectoriels munis de bases finies. Soient $u \in L(E, F)$ et $v \in L(F, G)$. Alors $[v \circ u]_{\mathcal{D}, \mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{D}, \mathcal{C}}[u]_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$.

2.3. Changements de bases

Définition. Soient $\mathcal{B}$ et $\underline{\mathcal{B}}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E . On définit la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\underline{\mathcal{B}}$ comme la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs-colonnes des coordonnées des vecteurs de la base $\underline{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$: $P = [Id]_{\mathcal{B}, \underline{\mathcal{B}}} = \varphi_{\underline{\mathcal{B}}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}}$.

Proposition. Avec les notations ci-dessus et $\vec{x} \in E$, on a $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = P[\vec{x}]_{\underline{\mathcal{B}}}$.

Théorème. Soient $\mathcal{B}$ et $\underline{\mathcal{B}}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\underline{\mathcal{B}}$. Soient $\mathcal{C}$ et $\underline{\mathcal{C}}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie F et Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\underline{\mathcal{C}}$. Soit $u \in L(E, F)$. On a $[u]_{\underline{\mathcal{C}}, \underline{\mathcal{B}}} = Q^{-1}[u]_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}P$.

Lorsque $F = E$, $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ et $\underline{\mathcal{C}} = \underline{\mathcal{B}}$, cette formule devient $[u]_{\underline{\mathcal{B}}} = P^{-1}[u]_{\mathcal{B}}P$.

Définition. On dit que $A, \underline{A} \in M_n(K)$ sont semblables s'il existe $P \in M_n(K)$ inversible telle que $\underline{A} = P^{-1}AP$.

3. Déterminants

On définit par récurrence sur n l'application $\det_n : M_n(K) \rightarrow K$ en posant

$$\det_1(a) = a \text{ pour } a \in M_1(K) = K$$

$$\det_n(A) = a_{1,1}\det_{n-1}(A_{1,1}) - a_{2,1}\det_{n-1}(A_{2,1}) + \dots + (-1)^{n+1}a_{n,1}\det_{n-1}(A_{n,1}) \quad \text{où } A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$$

et $A_{i,j} \in M_{n-1}(K)$ est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j .

Les règles suivantes sont très utiles en pratique :

- (i) le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit des éléments de sa diagonale ;
- (ii) l'échange de deux lignes multiplie le déterminant par -1 ;
- (iii) la multiplication d'une ligne par un scalaire multiplie le déterminant par ce scalaire ;
- (iv) ajouter un multiple d'une ligne à une autre ne change pas le déterminant.

Théorème.

- (i) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ pour $A, B \in M_n(K)$;
- (ii) $\det({}^t A) = \det(A)$ où ${}^t A$ est la matrice transposée de A ;
- (iii) A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Etant donnée $A \in M_n(K)$, on définit la comatrice $\tilde{A} = ((-1)^{i+j} \det(A_{i,j}))$. On a $A {}^t \tilde{A} = {}^t \tilde{A} A = \det(A)I_n$. Cela donne une expression de A^{-1} si A est inversible.